

2.2.3 Modellbasierte Verhaltensermittlung – virtuelles Experiment

Die Tabelle 2.8 weist die hauptsächlich interessierenden Größen und Modellinhalte für die einzelnen Verhaltensbereiche aus.

Verhaltensbereich	interessierende Größen (Ursache/Wirkung, Input/Output)	Modellinhalt (Funktion/Physik, Struktur/Elemente)
Kinematik	Input: Geometrieparameter / Antriebsgrößen Output: Endeffektorgößen	Vorwärtstransformation / Geometrie (Direkte kinematische Transformation)
	Input: Geometrieparameter / Endeffektorgößen Output: Antriebsgrößen	Rückwärtstransformation / Geometrie (Inverse kinematische Transformation)
Statik / Dynamik	Input: Geometr.- u. Materialparam. Belastg.kräfte und –momente Output: Steifigkeits-, Dämpfungs- und Trägheitsverteilung / Deformationen, Spannungen	Diskrete Modelle mit konzentrierten Elementen u. konzentrierten Parametern (konzentrierte Federn, Punktmassen, ...)
		Diskrete FE-Modelle mit verteilten Parametern (Balken-, Scheiben-, Platten-, Schalen-, Volumen- Elemente)
Dynamik	Input: Steifigkeits-, (Dämpfungs-,) und Trägheitsverteilung Output: Eigenfrequenzen und Schwingungsformen	reeles (komplexes) Eigenwertproblem
Thermik	Input: Geometr.- u. Materialparam., Wärmeströme, Randbeding. Output: Kapazitäts- u. Wärmeleit- wertverteilung / Temperaturverteilung, Thermische Ersatzkräfte	Diskrete Modelle mit konzentrierten Elementen u. konzentrierten Parametern (Knotenpunktmodell)
		Diskrete FE-Modelle mit verteilten Parametern (Balken-, Scheiben-, Platten-, Schalen-, Volumen- Elemente)

Tabelle 2.8 Interessierende Größen und Modellinhalt in den Verhaltensbereichen

2.2.3.1 Einführung in das Modellproblem

Modellbegriff

Eine recht brauchbare allgemeine Fassung für den Modellbegriff findet sich beispielsweise in der *kybernetischen Modelldefinition* von Klaus) [15], die den Modellbegriff über eine dreistellige Relation zwischen Modell, Original und Subjekt beschreibt. Demnach bestimmt sich ein Modell immer erst durch seine Beziehungen zu dem, *wovon* es Modell ist, und zu dem, *wofür* es Modell ist, wie Bild 2.193 zeigt.

„Wenn zwischen einem Objekt M und einem Objekt O (Modelloriginal) *Analogien* bestehen, ist M für ein [kybernetisches] System S (Modellsubjekt) in verallgemeinertem Sinne ein Modell, sofern *informationelle Beziehungen* zwischen S und M dazu beitragen können, *Verhaltensweisen* von S gegenüber O zu beeinflussen“ [15].

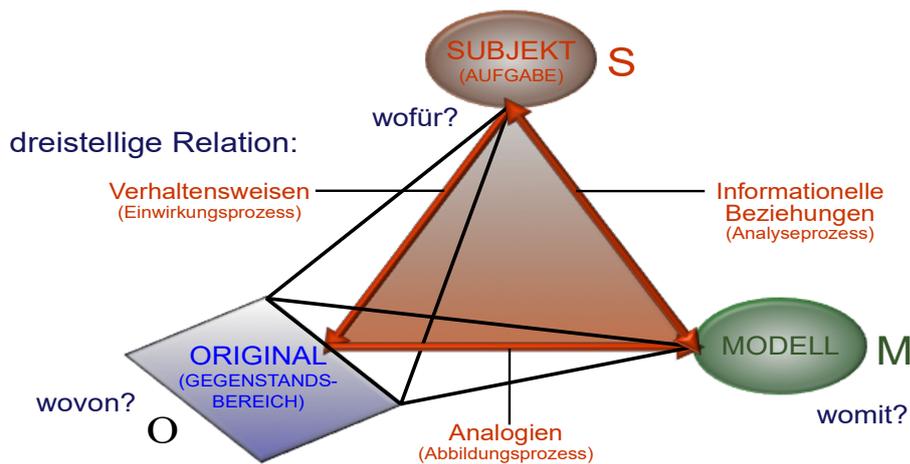


Bild 2.193 Veranschaulichung des Modellbegriffs

Das Modell umfasst damit die Abbildung des Originals mit den für die Aufgabenstellung relevanten Eigenschaften. Mit welcher Qualität und Quantität diese Abbildung erfolgt ist entwicklungsbedingt, Bild 2.194. Die mit der Simulation gegebene Möglichkeit auch zeitliche Veränderungen abzubilden, kann in seiner Bedeutung nicht genug geschätzt werden. Das ist praktisch die Möglichkeit, das Modell „leben“ zu lassen.

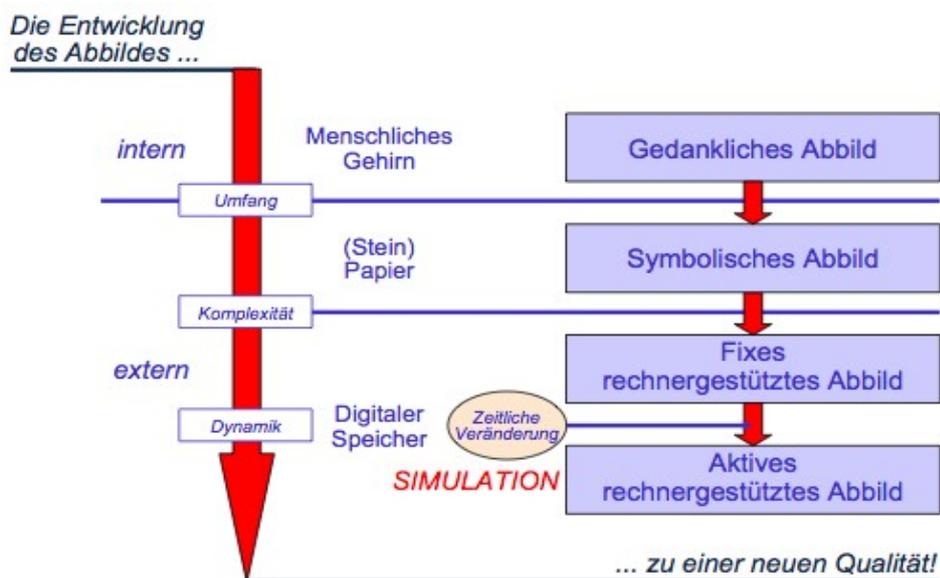


Bild 2.194 Entwicklung des Abbildes

Modellklassifikation

In den verschiedenartigen Disziplinen und Zusammenhängen der Modellanwendung existiert eine Vielzahl von Gesichtspunkten zur *Spezifikation und Klassifizierung* von Modellen, z.B.:

- nach Aspekten des Originals, die Analogien im Modell besitzen (Funktions-, Struktur-, Verhaltens-, Geometrie-, Kinematik-, ...),
- nach dem Verwendungszweck der Modellaussagen (Beschreibungs-, Erklärungs-, Prognose-, Optimierungs-, Entscheidungs-, ...),

- nach den zur Modellbildung verwendeten Methoden und Werkzeugen (CAD-, FEM-, MKS-, BLOR-, Petri-Netz-, ...),
- nach Merkmalen, die dem Modell selbst zukommen (Bild 2.195)

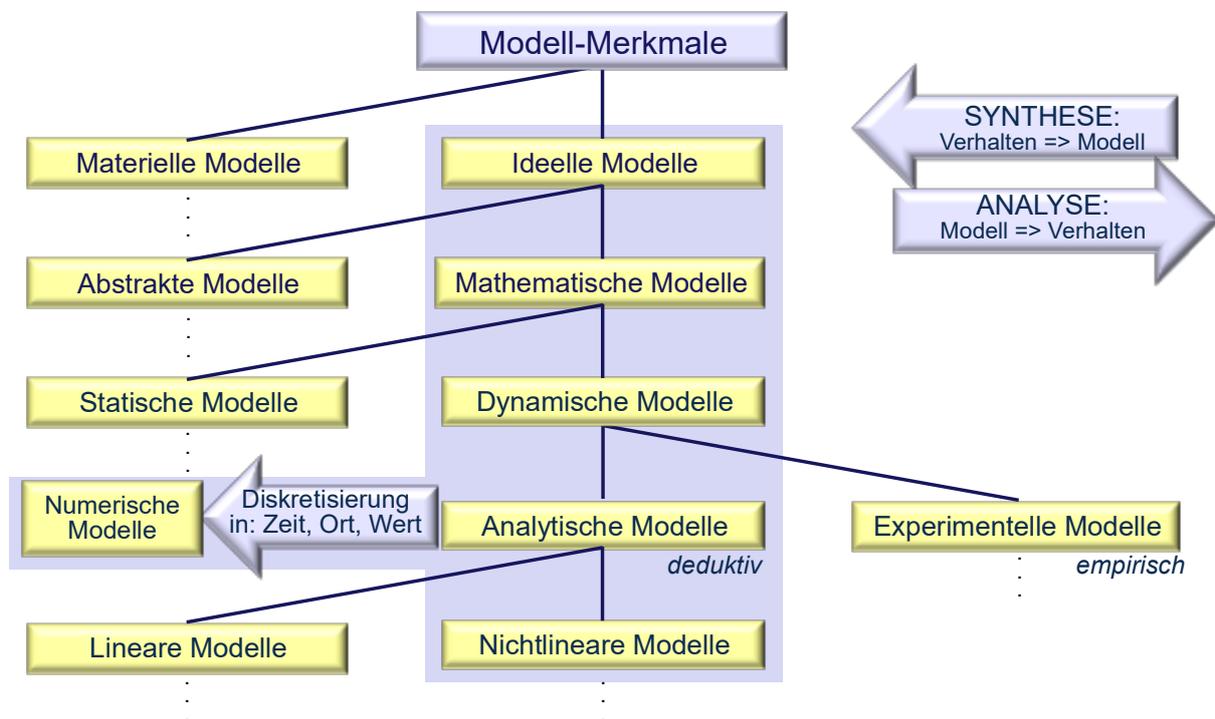


Bild 2.195 Klassifizierung nach Merkmalen, die dem Modell selbst zukommen

Modellfindung

Es geht bei der Modellfindung nicht darum, möglichst „viel“ oder „detailliert“ oder gar „alles“ abzubilden, sondern das „Richtige“ - also entsprechend dem alten Grundsatz: „so genau wie nötig, nicht wie möglich!“, wobei die Wertung von „genau“ und „nötig“ ausschließlich durch die Aufgabenstellung bestimmt wird. Damit haben wir zwar das Wesentlichste zur Modellproblematik gesagt, konkrete Untersetzungen als unterstützende Hilfestellungen für eine gezielte Modellfindung lassen sich jedoch daraus nicht ableiten. Dies ist - und eben das entspricht der Natur der Sache - nur am konkreten Objekt im Zusammenhang mit der konkreten Aufgabenstellung möglich! Natürlich gibt es eine ganze Reihe von Aufgabenklassen und Systemcharakteristika, die die zugeordnete Formulierung von Modellierungsgrundsätzen und -regeln in konkreterer Form ermöglichen. Eine umfassende und systematische Darstellung kann und soll jedoch hier nicht erfolgen. Stattdessen wollen wir lediglich an einigen ausgewählten Problemstellungen ein Gefühl für die entscheidende Bedeutung der Modellqualität sowie für die erforderlichen Herangehensweisen vermitteln.

Der Modellbegriff stellt die zentrale Bedeutung der Aufgabenstellung heraus. Mit Blick auf den Modellbildungsprozess bestimmt sie die erforderlichen Analogien zwischen realem und virtuellem System. Entlang der Phasen des Lebenszyklus eines technischen Systems lassen sich unterschiedliche Schwerpunkte für die berechnungs- und simulationsrelevanten Aufgabenstellungen ausmachen, von denen folgend einige markante Beispiele mit ihren daraus resultierenden Anforderungen an die Modellierung charakterisiert werden sollen.

Simulationsrelevante Aufgabenstellungen entlang des Lebenszyklus

1. Konzeptentwicklung und Entwurf

Berechnungs- und Simulationsaufgaben in der Phase der Konzeptentwicklung und des frühen Entwurfes unterstützen konzeptionelle Grundentscheidungen über alternative Gestaltungsmöglichkeiten. Damit steht weniger die absolute Wertung der Einzellösung als eher die vergleichende Einschätzung der Alternativen im Mittelpunkt des Interesses. Hinsichtlich der Modellbildung liegt damit der Schwerpunkt auf der Gewährleistung der Vergleichbarkeit. Einerseits sind damit für das Gesamtsystem in der Regel größere Abstraktionen und Vereinfachungen zulässig, andererseits müssen natürlich die variantenbildenden Struktur- und Parameterunterschiede sowie die das Verhalten der Varianten charakterisierenden Eigenschaften repräsentativ in den Modellen abgebildet werden. Ein typisches Beispiel für eine in diesem Sinne angemessene Vorgehensweise liefert die vergleichende Bewertung der Bahndynamik alternativer Bewegungssysteme.

2. Fertigungs-, Montage- und Inbetriebnahmeunterstützung

Das Ziel einer berechnungs- und simulationsgestützten Vorbereitung auf Fertigung, Montage und Inbetriebnahme besteht im weitesten Sinne in der Ermittlung der qualitätsbestimmenden Schwerpunkte, ganz gleich ob es im einzelnen um die funktionelle Zuverlässigkeit, um Genauigkeitseigenschaften oder die Leistungsauslastung am System geht. Dabei steht nicht das technische Prinzip oder das Gestaltungskonzept im Mittelpunkt der Untersuchung, sondern die Analyse und gegebenenfalls die Zusicherung einzelner - über Fertigung, Montage und Inbetriebnahme beeinflussbarer - technischer Parameter.

Mit den Mitteln der Simulation sind völlig neue und vielfach wesentlich direktere Verfahren der Qualitätsprüfung und -überwachung denkbar. Erste Beispiele in einer derartigen Richtung werden bereits praktiziert. So sollte beispielsweise die funktionell richtige Einstellung der Vorspannung von Zahnriementrieben anhand von Eigenfrequenzmessungen erfolgen.

Methodisch handelt es sich bei der simulationsgestützten Analyse von Fertigungs-, Montage- und Inbetriebnahmeschwerpunkten um eine verallgemeinerte Toleranzanalyse (über den geometrischen Bereich hinaus), die technisch-funktionell wirksamen Parameter betreffend. Modellseitig besteht damit der Anspruch, die in diesem Zusammenhang wesentlichen Abhängigkeiten, Wirkungsmechanismen und Parameter adäquat abzubilden sowie eine Sensibilitätsanalyse, das heißt eine geeignete Parametervariation und -einflussermittlung zu ermöglichen. Beispielsweise ist die virtuelle Inbetriebnahme einer lagegeregelten Vorschubachse auf deren Simulationsergebnissen aufbauend möglich und damit kann der reale Antrieb und Regler zügig und optimal eingestellt werden.

3. Experimentelle Untersuchung und Maschinenabnahme

Die für die Simulationsanwendung interessierenden Aufgabenstellungen bei der Vorbereitung, Durchführung und Auswertung von Maschinenabnahmen oder verallgemeinert bei experimentellen Systemuntersuchungen schlechthin, sind grundsätzlich ähnlich gelagert wie bei der Fertigung, Montage und Inbetriebnahme. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass nun nicht mehr vordergründig die einflussstärksten und zumeist lokalen Parameter gesucht und überwacht werden, sondern vorwiegend ganzheitlich wirkende Systemfunktionalität ermittelt und geprüft wird. Die Simulation kann dabei eingesetzt werden, um die aussagefähigsten oder -sichersten Messgrößen festzulegen, deren Erwartungswerte und zulässigen Streuungen vorzugeben, Prüfeinrichtungen und -abläufe zu planen oder die Auswertung und Interpretation der Messergebnisse zu stützen. Im Sinne der Messtechnik handelt es sich dabei vielfach um sogenannte vermittelnde Beobachtung,

das heißt die eigentlich interessierenden Größen sind, z.B. aufgrund von Unzugänglichkeit, messtechnisch nicht erfassbar und werden indirekt aus den gemessenen Größen ermittelt. Dies setzt jedoch voraus, dass zwischen den gemessenen und den interessierenden Größen ein für die „Rückrechnung“ geeigneter und bekannter Zusammenhang existiert. Für geometrische Transformationen, statische Abhängigkeiten oder allgemein für lineare Übertragungseigenschaften zwischen den Mess- und den Beurteilungsgrößen ist dies mehr oder weniger unproblematisch. Für nichtlineare Verknüpfungen ist das geschilderte Problem praktisch nur noch mit der Simulation lösbar.

Es bedarf nur geringer Phantasie, sich vorzustellen, wie mit qualifizierten „Simulationsexperimenten“ der Untersuchungsaufwand erheblich reduziert und die Aussagefähigkeit gesteigert werden können. Allerdings darf gerade bei derartigen Aufgabenstellungen der Modellanspruch nicht unterschätzt werden, denn es geht oft um die Untersuchung funktionsgefährdender „Dreckeffekte“, die - wenn sie nicht im Modell enthalten sind - natürlich auch in ihren Wirkungen nicht analysiert werden können. Die unter anderem auch daraus resultierende enorme Bedeutung des „richtigen“ Experimentes für die Simulation soll hier deutlich unterstrichen werden.

4. Schwachstellenanalyse und Konstruktionsänderung

Mit der Bewertung des Einflusses der Komponenten und ihrer Parameter auf das wertbildende Systemverhalten ist eine unter technischen und wirtschaftlichen Gesichtspunkten erfolgende Abstimmung der Einzelparameter auf das Gesamtsystem möglich, und es können Aussagen zur Wirksamkeit konstruktiver Änderungsmaßnahmen getroffen werden. Die Auslöser für konstruktive Änderungen an bereits ausgeführten Systemen können sehr verschiedene Ursachen haben. Sie reichen von der - auf den Ergebnissen einer Musterausführung gegründeten - Überarbeitung zur Serieneinführung über die „normale“ technische Weiterentwicklung oder die notwendigen Reaktionen auf Veränderungen im Zulieferbereich bis zu kundenspezifischen Anpassungen. In allen Fällen steht jedoch die Frage, wie sich die beabsichtigten Konstruktionsänderungen auf das interessierende Systemverhalten auswirken. Da, wo die betrachteten Systeme ein entsprechendes Investitionsvolumen binden, sind auch Modernisierungen im Sinne von Parameteroptimierungen und Umrüstungen von besonderem Interesse. Auch hierbei kann die Simulation ein zielgerichtetes und effektives Vorgehen wirksam unterstützen. Typisch für die Modellierungsproblematik im Zusammenhang mit der Schwachstellenanalyse und Konstruktionsänderung ist, dass in aller Regel bereits ein ausgeführtes System vorliegt. Damit existiert gegebenenfalls auch umfangreiches experimentell gestütztes Wissen über Parameter und Systemverhalten bzw. kann dieses bei Bedarf erhoben werden. Dadurch werden sowohl eine experimentell gestützte Modellbildung - z.B. als Parameterbestimmung - als auch eine experimentelle Modellüberprüfung möglich.

5. Prozessoptimierung und modellbasierte Steuerungskonzepte

Problemstellungen, die sich mit der Prozessoptimierung oder der Steuerungsfunktionalität beschäftigen, legen zunächst ein technisches Realisierungssystem für den Prozess oder die umzusetzende Steuerungsfunktion zugrunde, ohne dass dieses System selbst im Mittelpunkt der Betrachtungen steht. Wir hätten es jedoch nicht mit komplexen Systemen zu tun und würden allen bisher angesprochenen Modellierungsgrundsätzen zuwider handeln, wenn daraus geschlossen würde, dass die Ansprüche an die Modellierung des Realisierungssystems damit a priori geringerwertiger würden. Auch hier bestimmt allein das Untersuchungsziel in Verbindung mit dem dafür relevanten Systemverhalten die Abbidungsanforderungen, das heißt, dass für die oben genannten Problemstellungen zumin-

dest *zusätzlich* die prozess- und steuerungsbeschreibenden Eigenschaften *angemessen* in das Simulationsmodell aufgenommen werden müssen!

6. Diagnose, Überwachung und Schadensanalyse

Die simulationsgestützte Schadensanalyse lässt sich bei der Ursachenfindung wie auch bei der Schadensverhütung gleichermaßen einsetzen. So ermöglicht die Simulation beispielsweise das Betreiben des virtuellen Systems unter extremen Bedingungen, welche am Realsystem Schäden oder in der Umgebung Gefahren zur Folge hätten. Auf der Grundlage entsprechend ausgewerteter Simulationsergebnisse lassen sich dann begründet Grenzwerte vorgeben und überwachen. Das wirtschaftliche Gewicht des Simulationseinsatzes zur Analyse von Schadensfällen wird insbesondere im Zusammenhang mit Großinvestitionen und dem damit vielfach verbundenen erheblichen Streitpotential bei der Ursachenzuordnung ersichtlich. Auch zur Festlegung von Überwachungs- oder Wartungsschwerpunkten und -zyklen kann die Simulation im Rahmen vorbeugender Diagnose gegenüber oder in Kombination mit der gezielten experimentellen Zustandserfassung zur Senkung von Aufwand und Risiko beitragen. Die sorgfältige Modellierung der Rand- und Lastbedingungen sowie der Parameterverhältnisse ist für die Untersuchung von Diagnose-, Überwachungs- und Schadensproblemen von ganz besonderer Bedeutung. Vielfach sind es gerade die beim Entwurf oder unter den realen Betriebsbedingungen „übersehenen“ Effekte, welche zu Schadensfällen führen - was eine für die Ursachenfindung brauchbare und aussagefähige Modellierung natürlich nicht gerade einfacher werden lässt, insbesondere wenn es um die vorbeugende Schadensvermeidung geht!

Abbildung des aufgabenrelevanten Verhaltens

Die Abbildung des aufgabenrelevanten Verhaltens ist bei der Modellierung technischer Systeme im allgemeinen mit Abbildungsanforderungen bezüglich struktureller und parametrischer Eigenschaften überlagert. Dies ist einfach in der Notwendigkeit begründet, eben diese Eigenschaften in ihrem Einfluss auf das Verhalten zu untersuchen und entsprechende - das heißt konstruktiv interpretierbare - Veränderungen am System vornehmen zu können. Insofern sind *reine* Verhaltensmodelle (black box), wie sie beispielsweise auf der Basis neuronaler Netze denkbar wären, für technische Simulationsanwendungen relativ uninteressant. Andererseits ist eine Modellauflösung bis zur elementar parametrisch und strukturell zuordenbaren geometrischen und physikalischen Einzelheit (glass box) in vielen Fällen weder möglich noch im Sinne der Aufgabenstellung sinnvoll. Die Praxis angemessener Modellauflösung wird also, als Kompromiss von ersetzender Verhaltensmodellierung und direkter Objektzuordnung, irgendwo zwischen den Extremen liegen. Damit ist ein Grundproblem der Modellfindung - insbesondere bei allgemeinen Netzwerkmodellen - beschrieben, welches nur durch fachbezogenes Wissen und praktische Erfahrung sowie strenge Orientierung an den Anforderungen der zugrundeliegenden Aufgabenstellung lösbar ist. Der Beitrag, den hierfür eine - wie auch immer komfortable - Software liefern kann, beschränkt sich auf die Bereitstellung von Beschreibungsmöglichkeiten und die „Vorfertigung“ elementarer oder für bestimmte Aufgabenklassen zweckmäßiger Modellierungsangebote. Der Umgang mit diesen Modellobjekten und die Übernahme der Verantwortung verbleibt jedoch ungeteilt bei dem problemlösenden Ingenieur und wird an der Zielstellung der jeweiligen Simulationsaufgabe gemessen.

Modellabgrenzung

Die Grenzen des Modells besitzen nicht nur Bedeutung hinsichtlich der Anwendungs- und Aussagegrenzen, sondern auch im ursprünglichen Sinne der Abgrenzung des Modells. Es

sollte also sehr bewusst behandelt werden, was sich auf der einen und was sich auf der anderen Seite des „Modellrandes“ befindet. Bild 2.196 demonstriert diese Problematik.

Die aufgabenorientierte Abbildung des Systems erfordert Festlegungen zu:

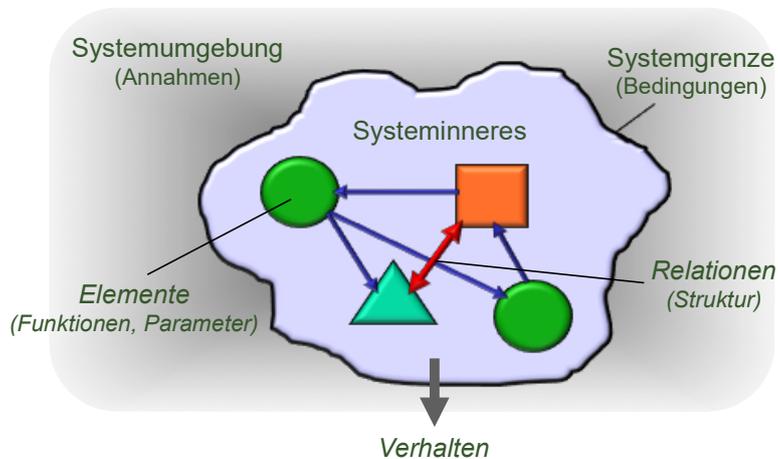


Bild 2.196 Systemdefinition im Rahmen der Modellfindung

Mit der „stillschweigenden Selbstverständlichkeit“ oder der definierenden Festlegung von Randbedingungen und Anfangswerten für die Modellgrenze sowie der „bequemen Unterstellung“ oder der expliziten Formulierung von Annahmen im Modellinnern werden unbewusst oder bewusst, gewollt oder ungewollt Wirkungen in der Außenwelt vorausgesetzt oder erzeugt, berücksichtigt oder übersehen.

Wir wollen hier zur Illustration lediglich einige Beispiele aus dem Bereich der Mechanik aufzählen, um damit den Blick auf die Tragweite und Ernsthaftigkeit derartiger Modellierungsfragen zu schärfen.

Die *Anfangswerte* eines mechanischen Modellsystems - also die Belegung der Zustandsgrößen, wie Wege und Geschwindigkeiten aber auch Kräfte und Momente - zum Startzeitpunkt der Simulation enthalten gegebenenfalls erhebliche Voraussetzungen, welche zumindest bewusst sein sollten. Selbst wenn alle diese Größen „Null“ sind, setzt dies die Existenz eines entsprechenden Gleichgewichtszustandes voraus. Vielfach wird der statisch (z.B. unter Eigengewichten) „eingefederte“ Zustand als Ausgangszustand für die dynamischen Untersuchungen „abgenullt“, was für nichtlineare Systeme eine iterative Bestimmung bzw. eine sogenannte „Vorsimulation“ erforderlich macht. Eine derartige Vorsimulation zur Gewinnung eines zulässigen Anfangszustandes ist zwingend, wenn die eigentlich interessierende Simulation „mitten“ in einem Bewegungszustand des Systems starten soll. Noch problematischer wird es, wenn sich im interessierenden Systemverhalten Einflüsse aus sogenannten „gedächtnisbehafteten“ Materialeigenschaften auswirken, wie es beispielsweise bei viskoelastischen, rheologischen oder piezokeramischen Werkstoffen der Fall ist. Unter solchen Umständen muss bei der Beschreibung des Anfangszustandes die „Vorgeschichte“ berücksichtigt werden.

Die *Einspannung* markiert ganz augenscheinlich eine Modellgrenze. Der starren Einspannung der Mechanik entsprechen der (druck)freie Abfluss in der Hydraulik und die „Erde“ in der Elektrik. So bequem und hinreichend die mechanisch starre Einspannung in vielen Fällen auch sein mag, sie ist zugleich auch die extreme Idealisierung. Dabei werden nicht nur die Bewegungsgrößen am Modellrand unabhängig von jeglichen Zuständen im Modellinneren zu

Null gesetzt, sondern eben dadurch auch Annahmen zum unbegrenzten Lastaufnahmevermögen hinsichtlich Größe, Reaktionszeit und Rückwirkungsfreiheit getroffen.

Die *äußeren Lasten* sind im Modell - ob konstant, zeit- oder zustandsabhängig - schnell „notiert“, sie sollten jedoch sehr sorgfältig hinsichtlich ihrer Wirkungsbedingungen geprüft werden. Mit verallgemeinerten äußeren Lasten können sowohl die antreibenden Kräfte oder Momente (also die Energiequellen) als auch die Arbeits- bzw. Nutzlasten (also die Energiesenken) beschrieben werden. Erfolgt die Formulierung der Lastverläufe über Kennlinien oder Funktionsausdrücke, so wird bezüglich des technischen Systems eine absolute Rückwirkungsfreiheit vorausgesetzt, was unter Umständen nicht selbstverständlich gegeben ist. Jedes Antriebsmoment besitzt ein entgegengesetzt wirkendes Abstützmoment! Auch hier ist anhand der Aufgabenstellung und der Systemeigenschaften zu entscheiden, ob beispielsweise die Abbildung einer motorischen Antriebsfunktion als vorgegebener Drehzahlverlauf, als Moment-Drehzahl-Kennlinie bzw. als Motormodell mit starrer oder eventuell elastischer Aufhängung erforderlich ist.

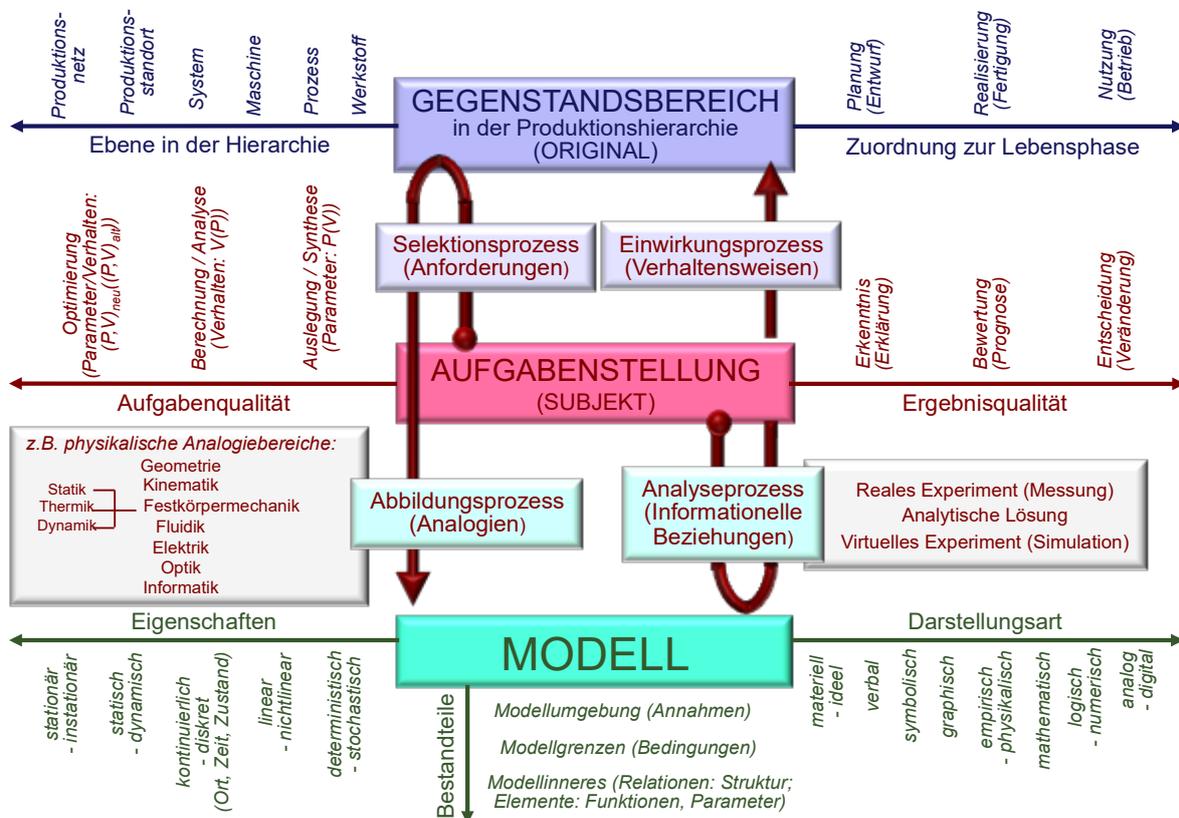


Bild 2.197 Vorgehen zur Modellfindung und Zuordnung der Modell Aspekte

Die „inneren“ Energien werden in der bewussten Modellbehandlung oft sträflich vernachlässigt und das nicht selten mit gravierenden Folgen für die Aussagefähigkeit der Simulationsergebnisse. Die vorangehend angesprochenen expliziten Antriebsfunktionen liefern - sofern keine die Energiequelle beschreibenden Motormodelle benutzt werden - bereits Beispiele für im Modell vorausgesetzte, jedoch nicht vollständig modellierte energetische Wirkungen „von außen“. Ernsthafte sind gegebenenfalls unbewusst bleibende Annahmen, die die Wirkung „innerer“ Antriebsfunktionen voraussetzen. Stellen wir uns beispielsweise eine Masse vor, die mit einem bestimmten Radius um eine Achse rotiert. Wenn wir nun den Radius - z.B. über eine Funktion - verringern, dann wird sich einerseits (nach dem Impulserhaltungssatz)

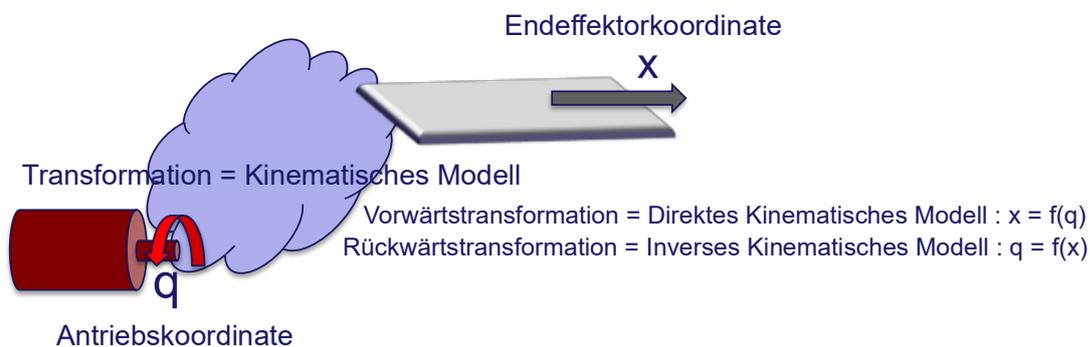
die Drehzahl erhöhen, andererseits ist dafür aber auch eine Stellkraft erforderlich! Gern werden bei der Modellierung auch Mechanismen der „inneren“ Energiesteuerung übersehen, was besonders bei selbsterregungsfähigen Systemen fatale Konsequenzen haben kann.

Anwendung des Modellbegriffs auf die Produktionstechnik

Bild 2.197 veranschaulicht Aspekte und Dimensionen bei der Anwendung des Modellbegriffs auf die Sachverhalte der Produktionstechnik.

2.2.3.2 Kinematische Modelle

Kinematische Modelle beschreiben den Zusammenhang von Antriebskoordinaten beziehungsweise -bewegungen und den Koordinaten bzw. Bewegungen am Endeffektor (zumeist der TCP), Bild 2.198.



Einfachstes Kinematisches Modell: $x = \frac{h}{2\pi} \varphi$ ($q = \varphi$, Kugelgewindetrieb)

Bild 2.198 Veranschaulichung des Kinematischen Modells

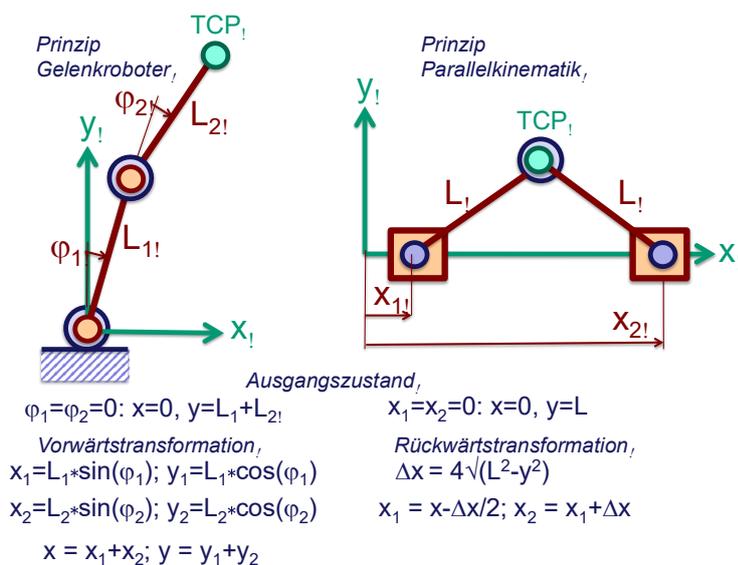


Bild 2.199 Kinematische Modelle

Kinematische Modelle haben insbesondere für alle Bewegungssysteme Bedeutung, die nicht (wie konventionelle WZM) über ein mechanisch eingprägtes orthogonales Koordinatensystem (Geradföhungen) verfügen, wie Gelenkroboter oder Parallelkinematiken, Bild 2.199.

Bild 2.200 zeigt typische Anwendungen des Kinematischen Modells, von denen die Rückwärts-

transformation für die Parallelkinematiken die größte Bedeutung hat, werden sie doch mit dieser Transformation gesteuert. Die Rückwärtstransformation ist bei den Parallelkinematiken linear und somit analytisch lösbar.

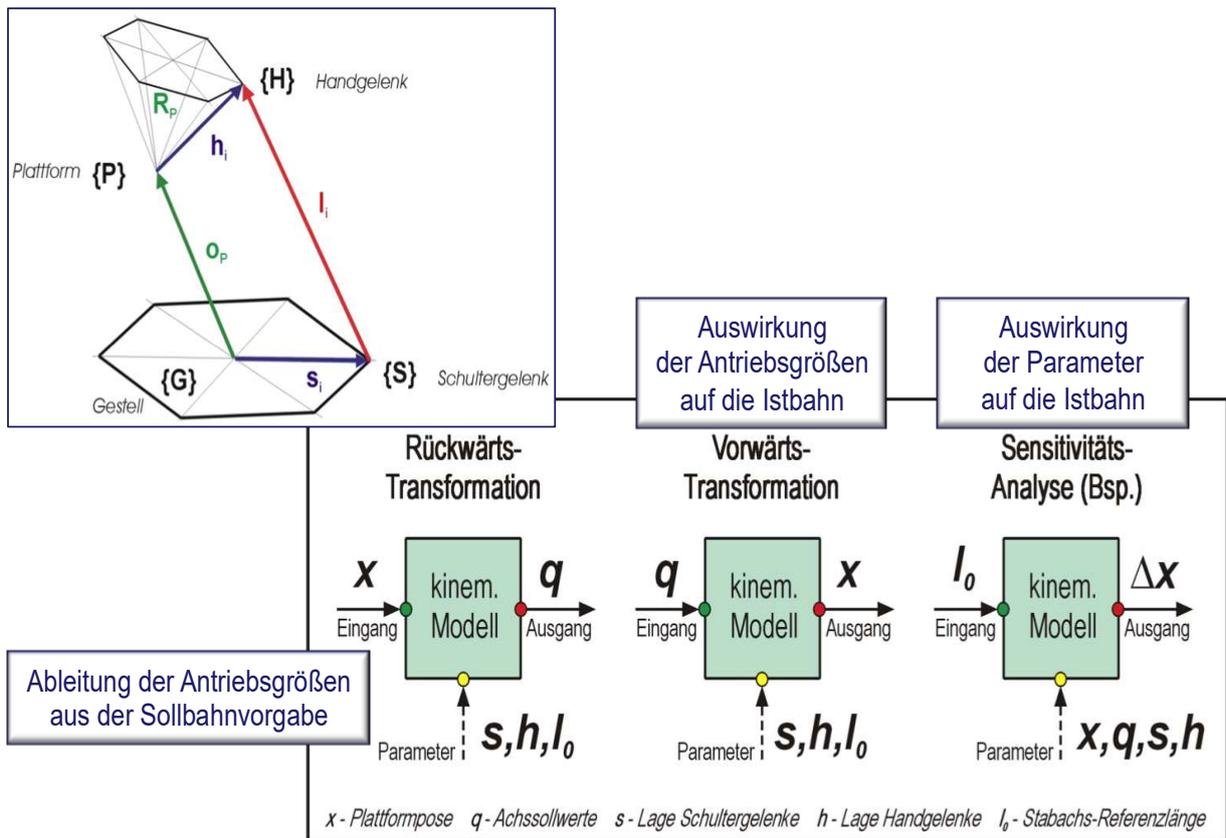


Bild 2.200 Anwendungsformen des Kinematischen Modells am Beispiel des Hexapods,[16]

Es gelten nach Bild 2.200 die Beziehungen

$$G_{O_p} + G_{h_i} + G_{l_i} + G_{S_i} = 0$$

$$I_i = |G_{l_i}| = \left| G_{O_p} + (G_{R_p} * P_{h_i}) \right|$$

Das kinematische Modell wird nicht nur zur Ableitung der Antriebsgrößen aus der Sollbahnvorgabe benutzt, es spielt auch beim Entwurf der Bewegungssysteme eine wichtige Rolle. Die Anwendungen erstrecken sich von der Synthese und Analyse des Bewegungsraumes, über die Erreichbarkeits- und Kollisionsprüfung, bis zur Bahnplanung und -programmierung.

Über die Aufnahme von Fehlerparametern in das sogenannte erweiterte kinematische Modell, Bild 2.201, und die Bestimmung der geometrischen Parameter des Modells im Rahmen einer geeigneten Kalibrierung (Abschnitt 2.2.2.1.6) kann die Bewegungsgenauigkeit erheblich gesteigert werden.

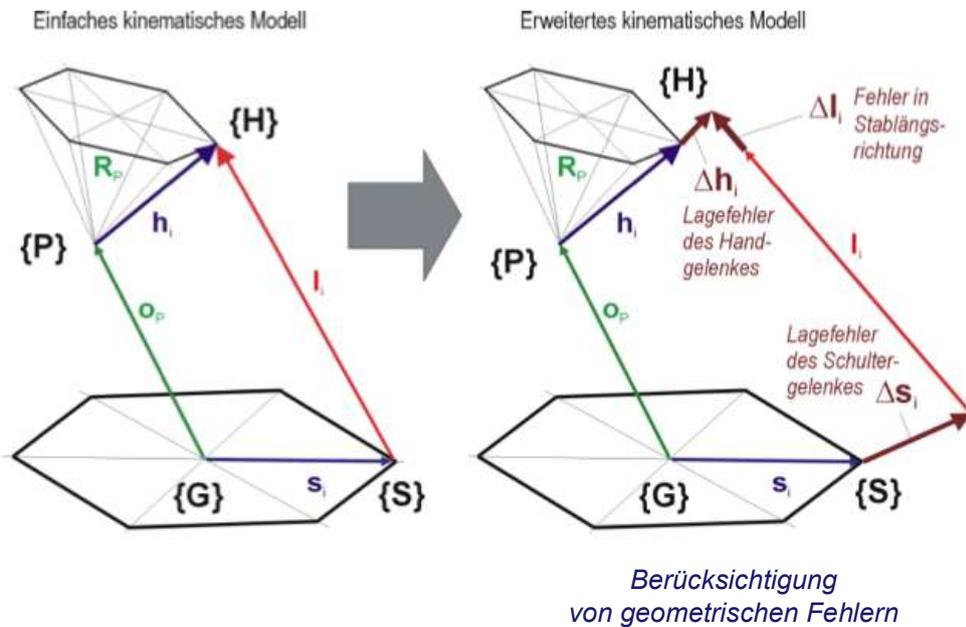


Bild 2.201 Erweiterung des Kinematischen Modells am Beispiel des Hexapods (nach [16])

2.2.3.3 Belastungsmodelle

Verformungen aus der Wirkung statischer, thermischer und dynamischer Einflüsse werden durch die in Bild 2.202 gezeigten und nachfolgend beschriebenen spezifischen Belastungen hervorgerufen.

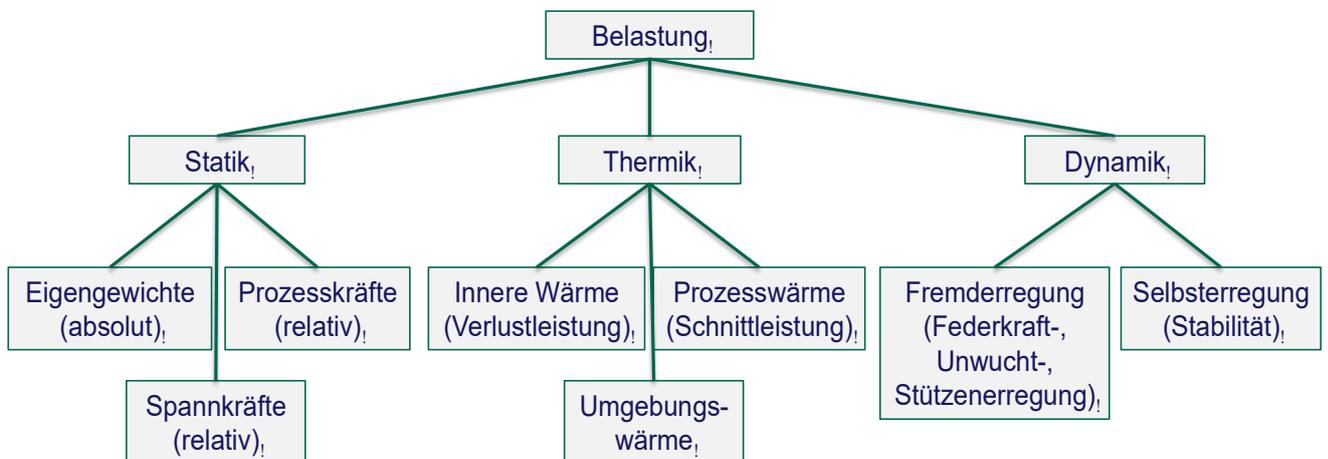


Bild 2.202 In den Verhaltensbereichen zu beschreibende Belastungen

2.2.3.3.1 Statische Lastbeschreibung

Modellseitig können statische Lasten als Punktlast konzentriert, als Streckenlast auf einer Linie oder als Flächenlast auf einer Fläche verteilt, eingeleitet werden Bild 2.203 *oben*. Ursächlich kann man die, relativ zwischen WZ und WSt wirkenden, Prozesslasten von den absolut wirkenden Eigengewichten unterscheiden. Ebenfalls statischen Charakter und relative Wirkung haben die sogenannten thermischen Ersatzlasten sowie die Spannkräfte, Bild 2.203, *unten*.

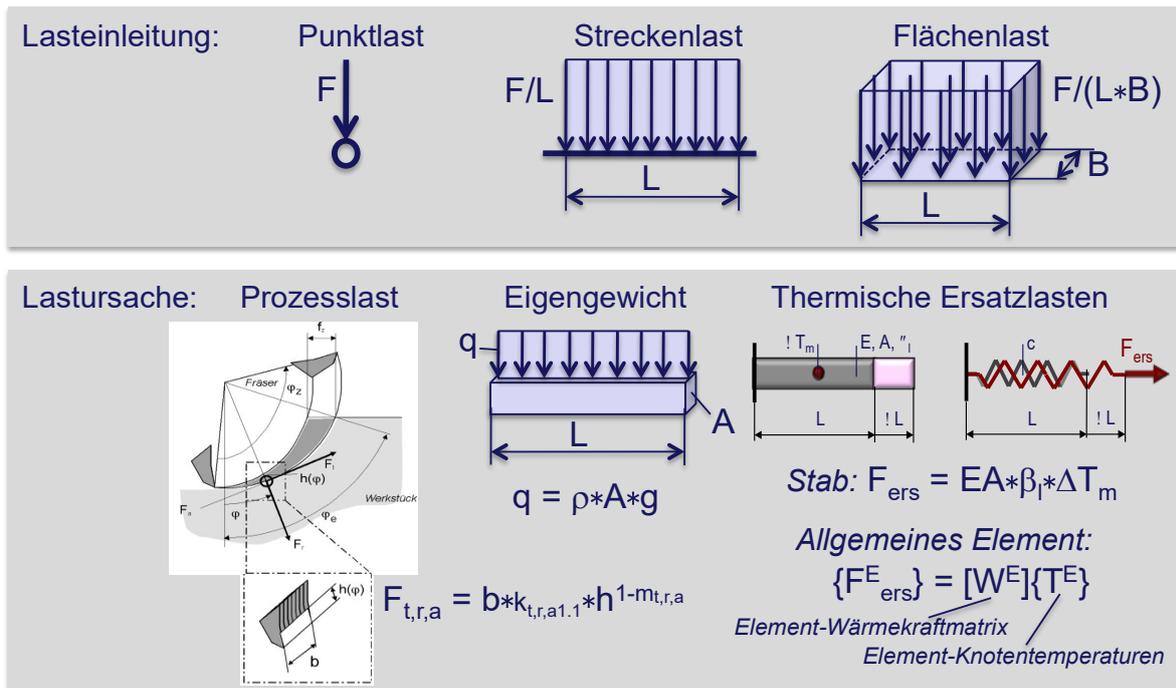


Bild 2.203 Lastbeschreibungen für die Statik

Die Auswirkungen der unterschiedlichen *Krafteinleitungsarten und Randbedingungen* auf den Charakter der Verformungen sind gravierend. Bild 2.204, *links* demonstriert am Beispiel eines beidseitig gelenkig gelagerten Balkens, dass sich bei der Beschreibung des Eigengewichts als Punktlast in der Mitte wesentlich größere Verformungen ergeben als für den realistischen Fall, der Verteilung als Streckenlast. Beim Eigengewicht ist es naheliegend, dass man aufgrund der Masseverteilung besser eine Strecken- bzw. Flächenlast wählt.

Besonders gefährlich ist die Punktlast beim Finite-Element-Modell. Da sie nur in einem Knoten angreift, verursacht sie irreal örtliche Verformungen, Bild 2.204, *Mitte*. Die Punktlast sollte nur in Verbindung mit konzentrierten, stab- oder balkenförmigen elastischen Elementen angewendet werden, da die Abstraktion der Belastung und der elastischen Struktur dann ein Niveau haben.

Analoges gilt für die Randbedingungen, definieren sie doch letzten Endes Kräfte bzw. Momente zur Fesselung des Systems, Bild 2.204, *rechts*.

Die Notwendigkeit zur Verteilung bei FE-Modellen gilt nicht nur für Lasteinleitung und Randbedingungen sondern auch für Koppelbedingungen, sind sie doch nichts anderes als die *Einleitung von Koppelkräften bzw. -momenten* in die zu koppelnden Bauteile. Schnell ist für die elastische Bauteilkopplung ein konzentriertes Federelement ins Modell eingefügt, ohne dass man sich der Konsequenzen bewusst wird.

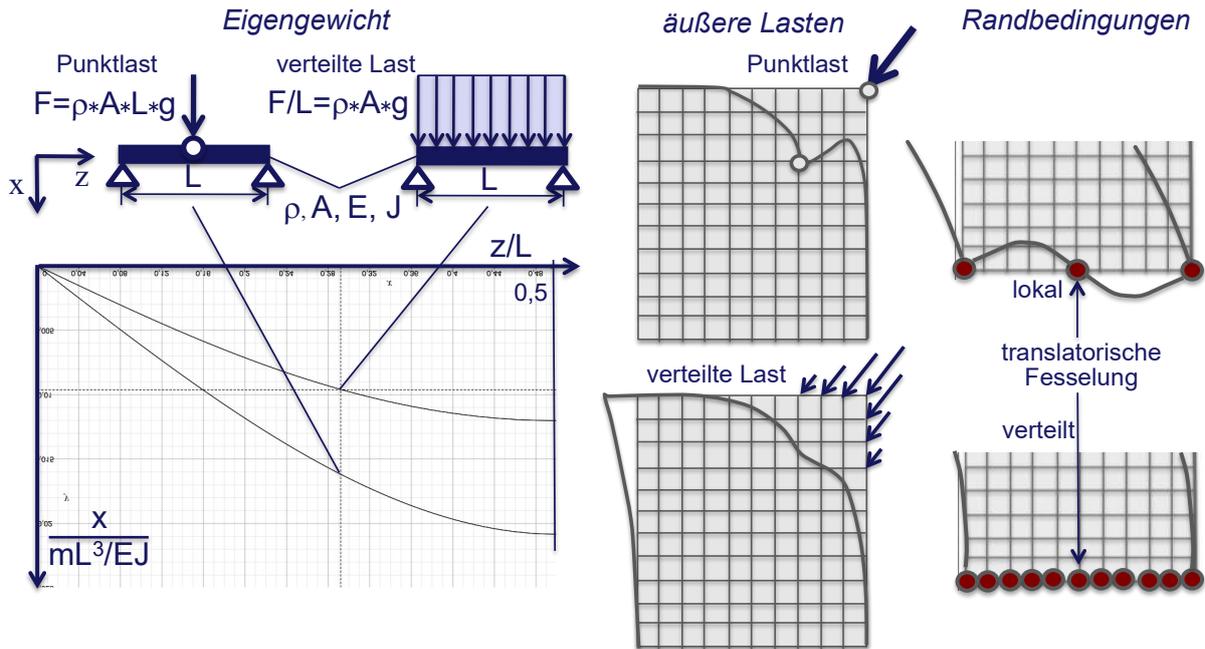


Bild 2.204 Einfluss der Last- und Randbedingungen auf die statische Strukturverformung

In Bild 2.205 ist, mit der Kopplung des Führungswagens einer Profilschienenführung an die Profilschiene über den elastischen Wälzkontakt, ein praktisches Beispiel gezeigt. Links im Bild ist die Kopplung mit einer den Wälzkontakt ersetzenden Feder ausgeführt und es tritt die unrealistische lokale Deformation in Form einer Delle auf. Rechts im Bild ist die Koppelsteifigkeit längs des Wälzkontaktes aufgeteilt und der Kontaktbereich durch zusätzliche Elemente versteift. Verglichen mit der gemessenen Nachgiebigkeit weist die Kopplung mit einem konzentriertem Federerelement eine relative Abweichung von 101% während die Verteilung der Koppelsteifigkeit weniger als 5% Abweichung zeigt.

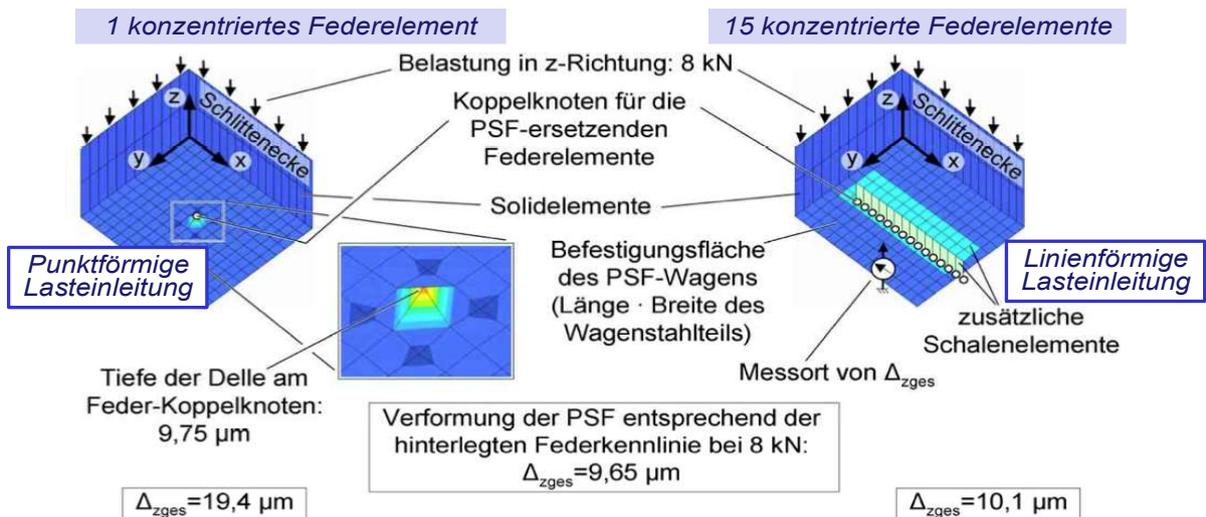


Bild 2.205 Elastische Ankopplung eines Führungswagens an die Schiene mittels Wälzkontakt-ersetzenden konzentrierten Federn (nach [17])

Die Wirkung der Eigengewichte auf die statisch bedingten Verformungen ist besonders für die *positionsabhängigen Gewichte der bewegten Baugruppen* von großer Bedeutung. Während sich die stellungenabhängigen Kräfte für die konventionellen Werkzeugmaschinen mit

kartesischen Vorschubachsen einfach angeben lassen, ist dies für Roboter- und Parallelkinematiken in der Regel aufwändiger. Im Folgenden soll das Vorgehen am Beispiel eines Hexapoden demonstriert werden[18]. Der Hexapod ist eine Parallelkinematik mit sechs längenveränderlichen Stabachsen, Bild 2.206.

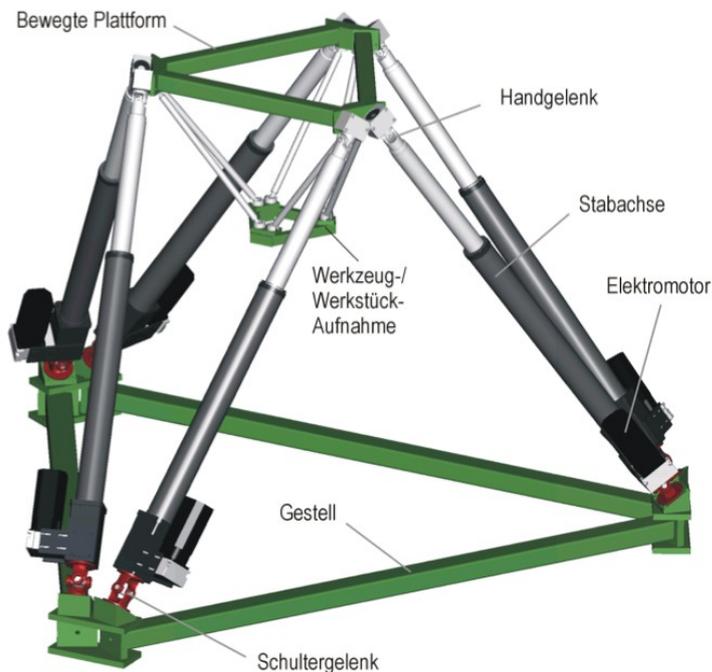


Bild 2.206 Hexapod

Die innere Kräfteverteilung aufgrund des Eigengewichts von bewegter Plattform und Stabachsen ist poseabhängig (Pose = Position + Orientierung). Die Pose der Bauteile ist für die jeweils aktuelle Soll-Lage des TCP's $(x, y, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$

mit dem kinematischen Modell (vgl. Abschnitt 2.1.3.2) berechenbar. Die Masse und Schwerpunktlage der Bauteile kann über ihre CAD-Geometrie bestimmt werden. Zur Berechnung der inneren Kräfte und Momente wird die Struktur in geeignete Teile zer-

schnitten und an jedem Schnittufer die entsprechend entgegengerichteten Kräfte und Momente angetragen. So werden die Stabachsen am Schulter (S)- und Handgelenk (H) aus der Struktur geschnitten und zusätzlich an der Mutter getrennt. Es entstehen dadurch 12 Teilsysteme aus den 6 Stabachsen (Bild 2.207) und ein Teilsystem mit der Bewegungsplattform (Bild 2.208). Damit beträgt die Anzahl der unbekannt Schnittraktionen 14 pro Stabachse; es liegen somit insgesamt 84 Unbekannte vor. Für die Lösung existieren mit den Kräfte- und Momentengleichgewichten an den 13 Teilsystemen 78 Gleichungen (6 Gleichungen pro Teilsystem). Die restlichen 6 erforderlichen ergeben sich aus den Rückdrehmomenten an den Kugelgewindetrieb-Muttern, da die Rückdrehung bei dieser Bauweise nicht durch eine zusätzliche Geradföhrung unterbunden wird. Durch eine Lösungsoptimierung kann die Lösung echtzeitfähig auf der Steuerung implementiert und für die Bewegungsfehler-Korrektur verwendet werden, Bild 2.209.

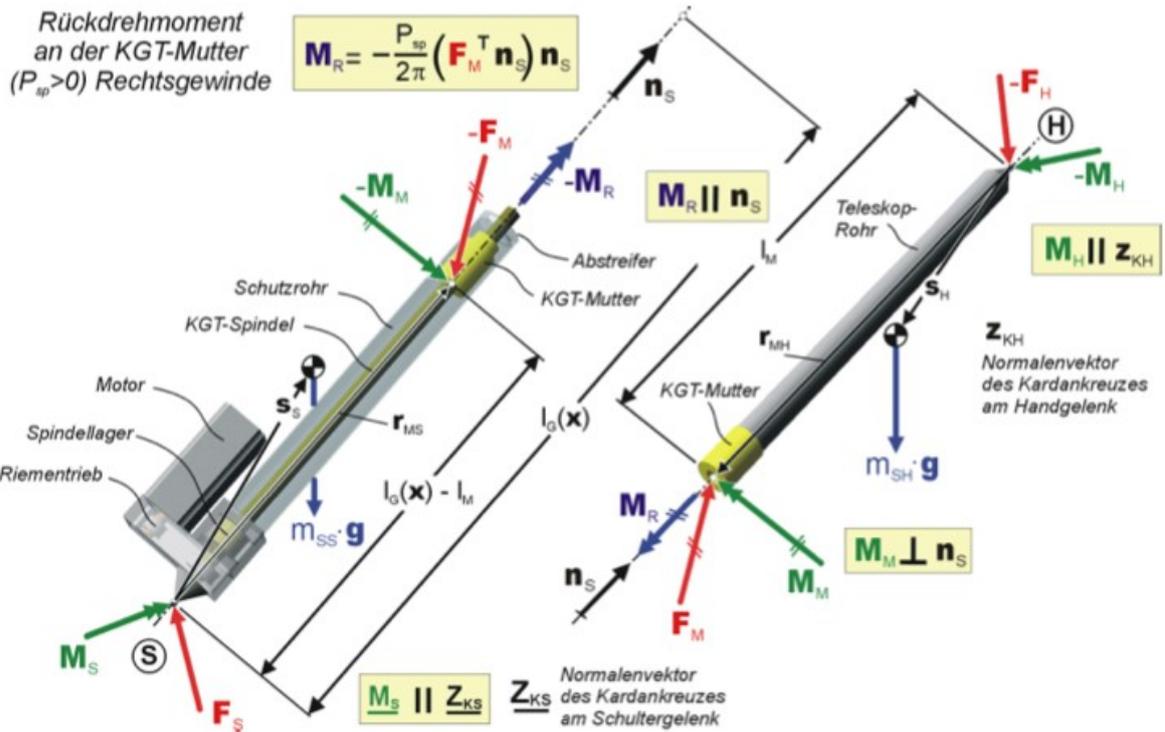


Bild 2.207 Räumliches Kräfte- und Momentengleichgewicht an den Stabachsen (nach [16])

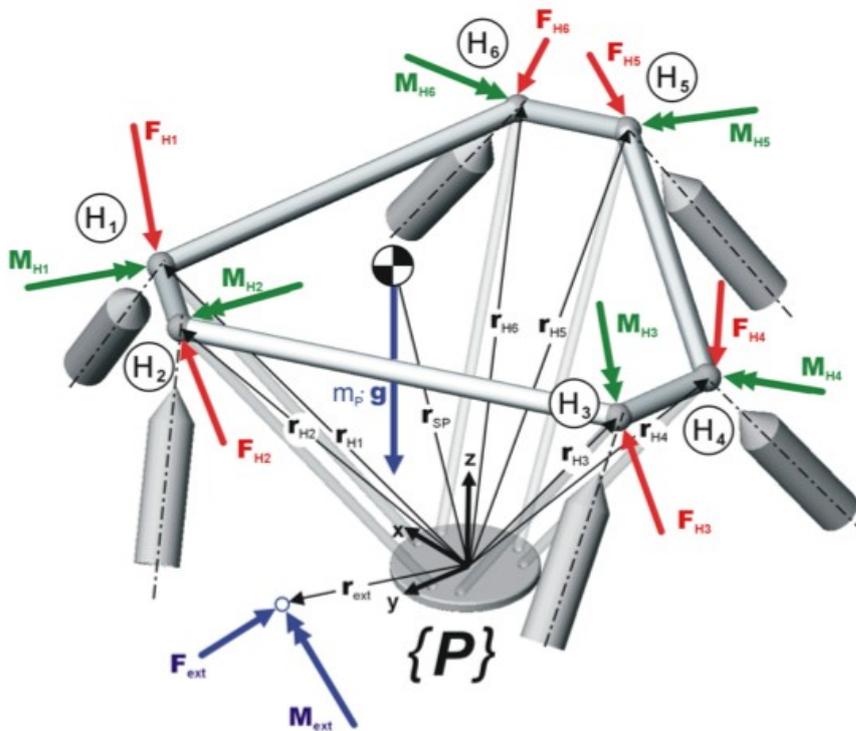


Bild 2.208 Räumliches Kräfte- und Momentengleichgewicht an der Bewegungsplattform (nach [16])

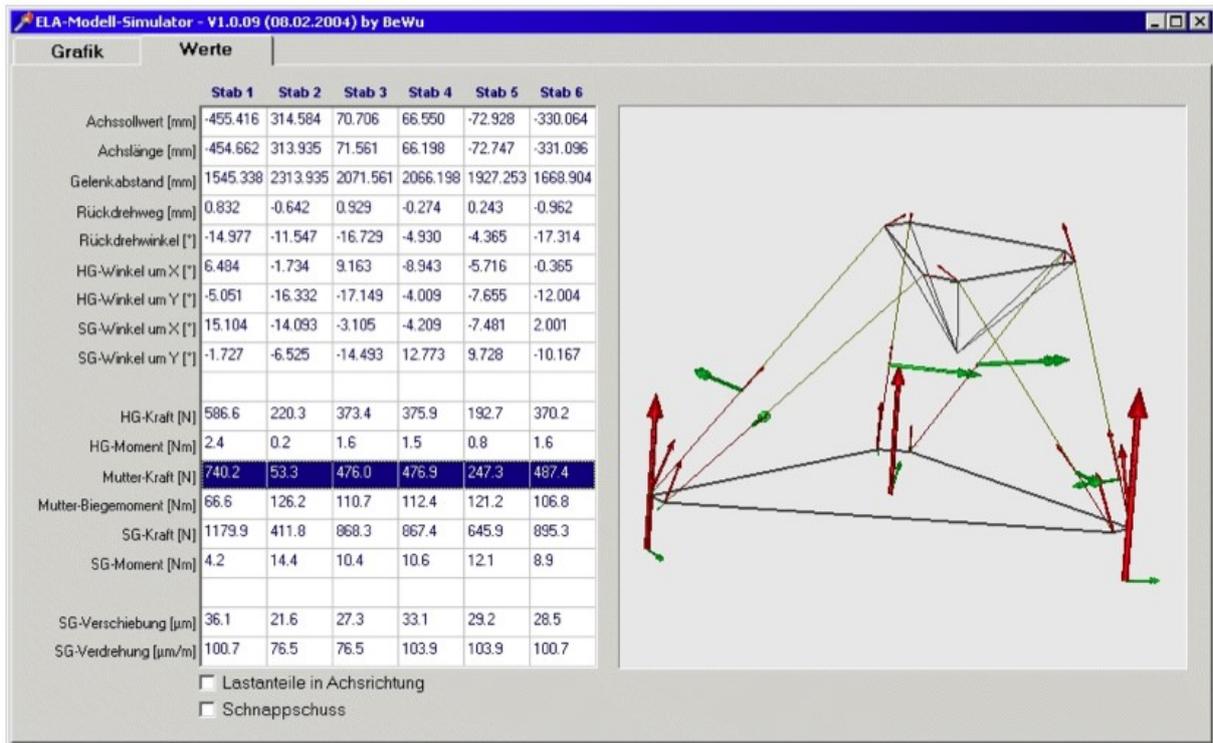


Bild 2.209 Bedienoberfläche der Hexapod-Steuerung mit Visualisierung der aus den verlagerten Eigengewichten resultierenden Kräfte und Momente (nach [16])

Für die *Prozesslastbeschreibung der Zerspanung* existieren verschiedene Modelle. In Tabelle 2.9 und Bild 2.210 sind die gebräuchlichsten Ansätze angegeben.

	Autor	Ansatz Formulierung
1	Taylor [19] Kienzle [20]	$F = b * kc_{1.1} * h^{1-m}$
2	Fischer [21] Weck [22]	$F = b * kc * h = k_s * A$
3	Faasen [23]	$F = b * k_t * h^x + b * k_{te}$
4	Friedrich [24] Campomanes [25]	$F = b * k_t * h + b * k_{te}$

Tabelle 2.9 Ansätze zur Schnittkraftbeschreibung nach [14]



Bild 2.210 Schnittkraftbeschreibungen verschiedener Autoren (nach [14])

Die Schnittkraftmodelle unterscheiden im Wesentlichen für ganz kleine und ganz große Spannungsdicken h . Für typische mittlere Spannungsdicken sind die Ergebnisse der verschiedenen Kraftansätze vernachlässigbar unterschiedlich. In diesem Bereich ist die Entscheidung für eines der Modelle oft nicht von der Verlaufsqualität, sondern von der Verfügbarkeit der werkstoff- und zerspanungsgeometrieabhängigen Kennwerte abhängig.

Für den Ansatz nach Kienzle liegen die umfangreichsten Kennwertsammlungen vor, weshalb er in der Literatur und in der Praxis am häufigsten verwendet wird. Nach Kienzle ergibt sich die Schnittkraft zu

$$F_c = b * k_{c1,1} * h^{1-m} * K \quad (2.69)$$

In Gleichung (2.69) bedeuten:

- b Spannungsbreite [mm],
- h Spannungsdicke [mm],
- $k_{c1,1}$ spezifische Schnittkraft [N/mm^2] und
- m Spannungsdickenexponent [-]

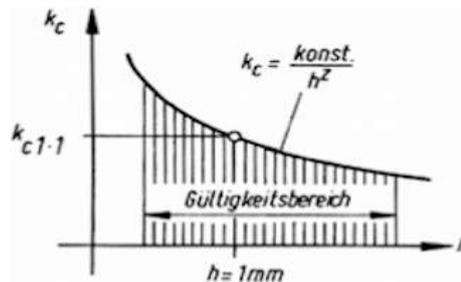
Nach [26] folgt der Korrekturfaktor K als

$$K = K_V * K_\gamma * K_{WS} * K_{WV} * K_{ks} * K_f \quad (2.70)$$

mit den Teilfaktoren nach Bild 2.212. In Bild 2.211 sind Richtwerte für $k_{c1,1}$ und m angegeben.

Dabei ist $k_{c1,1}$ die spezifische Schnittkraft für $1mm^2$ Spannungsquerschnitt.

Werkstoff	$k_{c1,1}$	m
S 2335 JR	1780	0,17
E295	1990	0,26
E335	2110	0,17
E360	2260	0,30
C15	1820	0,22
C35	1860	0,20
C45	2220	0,14
C60	2130	0,18
16 Mn Cr 5	2100	0,26
25 Cr Mo 4	2070	0,25
GE 240	1600	0,17
EN-GJL-200	1020	0,25
Messing	780	0,18
Gussbronze	1780	0,17



Tabellenwerte gelten für
 $h = 0,05 \dots 2,5 \text{ mm}$
 $\epsilon_s \approx 4$

Bild 2.211 Spezifische Schnittkraft und Spannungsdickenexponent (nach [26])

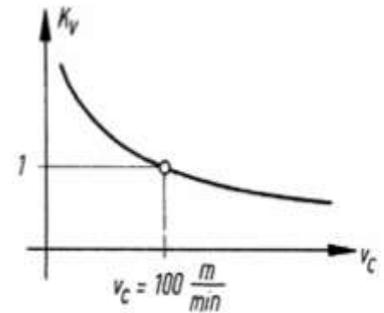
Schnittgeschwindigkeits-Korrekturfaktor K_v
für

$$v_c = 20 \dots 600 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

$$K_v = \frac{2,023}{v_c^{0,153}} \quad \text{für } v_c < 100 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

$$K_v = \frac{1,380}{v_c^{0,07}} \quad \text{für } v_c > 100 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

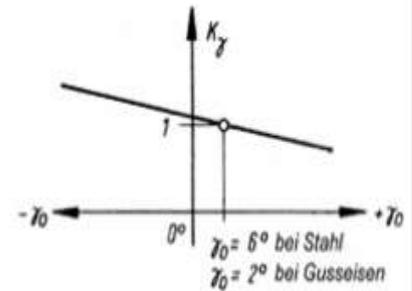
$$K_v = 1 \quad \text{für } v_c = 100 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$



Spanwinkel-Korrekturfaktor K_γ

$$K_\gamma = 1,09 - 0,015 \gamma_0^\circ \quad \text{für langspanende Werkstoffe (z.B. Stahl)}$$

$$K_\gamma = 1,03 - 0,015 \gamma_0^\circ \quad \text{für kurzspanende Werkstoffe (z.B. Gusseisen)}$$



Schneidstoff-Korrekturfaktor K_{ws}

$$K_{ws} = 1,05 \quad \text{für Schnellarbeitsstahl}$$

$$K_{ws} = 1 \quad \text{für Hartmetall}$$

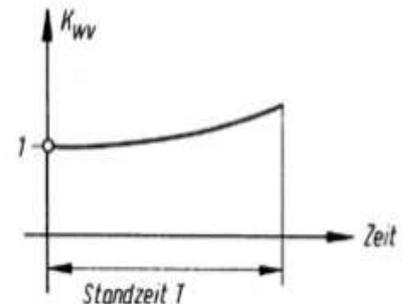
$$K_{ws} = 0,9 \dots 0,95 \quad \text{für Schneidkeramik}$$

Werkzeugverschleiß-Korrekturfaktor K_{wv}

$$K_{wv} = 1,3 \dots 1,5 \quad \text{für Drehen, Hobeln und Räumen}$$

$$K_{wv} = 1,25 \dots 1,4 \quad \text{für Bohren und Fräsen}$$

$$K_{wv} = 1 \quad \text{bei scharfer Schneide}$$



Kühlschmierungs-Korrekturfaktor K_{ks}

$$K_{ks} = 1 \quad \text{für trockene Zerspanung}$$

$$K_{ks} = 0,85 \quad \text{für nicht wassermischbare Kühlschmierstoffe}$$

$$K_{ks} = 0,9 \quad \text{für Kühlschmier-Emulsionen}$$

Werkstückform-Korrekturfaktor K_f

$$K_f = 1 \quad \text{für konvexe Bearbeitungsflächen (Beispiel: Außendreihen)}$$

$$K_f = 1,1 \quad \text{für ebene Bearbeitungsflächen (Beispiel: Hobeln, Räumen)}$$

$$K_f = 1,2 \quad \text{für konkave Bearbeitungsflächen (Beispiel: Innendreihen, Bohren, Fräsen)}$$

Bild 2.212 Spezielle Korrekturfaktoren für die Schnittkraftberechnung nach [26]

2.2.3.3.2 Thermische Lastbeschreibung

Die auf die Werkzeugmaschinen wirkenden Wärmequellen können in äußere, innere und prozessbedingte Wärmequellen unterschieden werden, Bild 2.213.

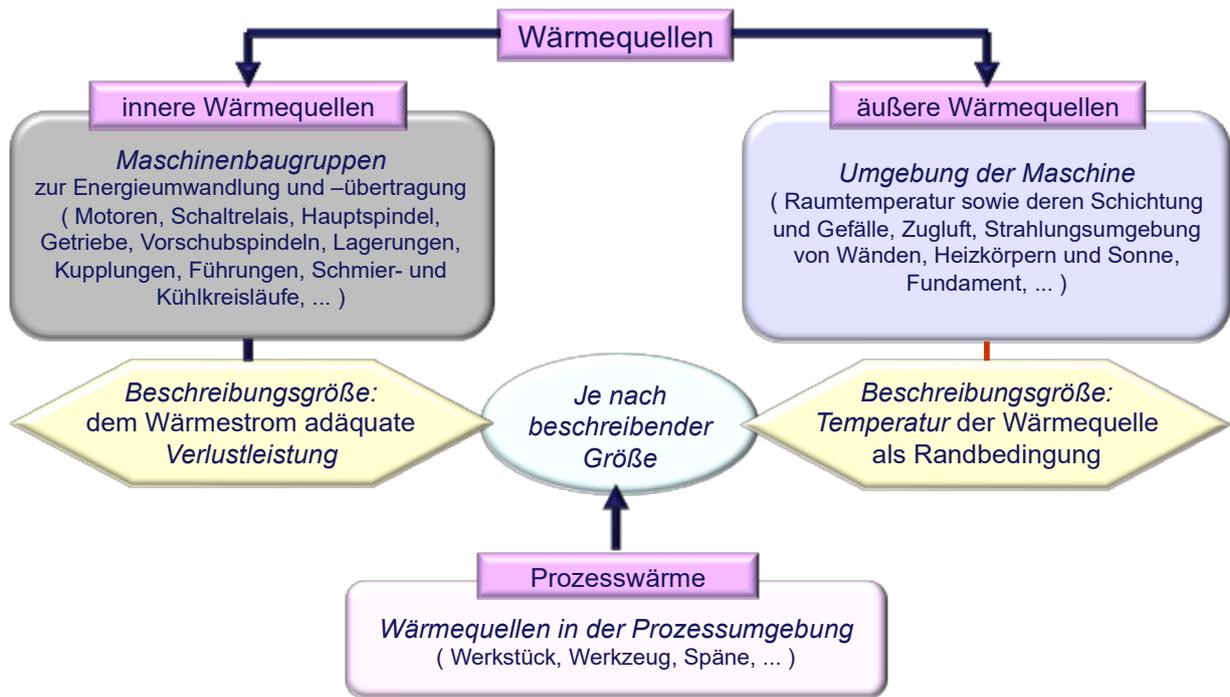


Bild 2.213 Wärmequellen in und um Werkzeugmaschinen und ihre Beschreibungsgrößen

Die Energieanteile irreversibler Vorgänge werden vollständig in Wärme umgesetzt (Erster Hauptsatz der Thermodynamik). Damit ist der Wärmestrom gleich der Verlustleistung. In Bild 2.213 sind Beispiele für die an Werkzeugmaschinen auftretenden Verlustleistungen und ihre Beschreibungsmöglichkeiten angegeben. Konkrete Parametrierungshinweise für die Beziehungen findet man z.B. in [10].

Der Wirkungsgrad η von *Zahnradgetrieben* hängt von der Stufenzahl und der Übersetzung i ab. Für die angeführten Getriebestufen kann der Wirkungsgrad η wie folgt angenommen werden:

Getriebestufe

- Stirnrad, gerad- und schrägverzahnt $\eta \approx 0,98$
- Kegelrad $\eta \approx 0,98$
- Spiral-Kegelrad $\eta \approx 0,98$

Kegelradgetriebe

- (je Stufe $i = 3 \dots 10$) $\eta \approx 0,98$
- 2 stufig ($i = 10 \dots 60$) $\eta \approx 0,96$
- 3 stufig ($i = 60 \dots 300$) $\eta \approx 0,94$
- 4 stufig ($i = 300 \dots 1000$) $\eta \approx 0,92$

Stirnkegelradgetriebe, versch. Übersetzungen $i = 5 \dots 170$ $\eta \approx 0,98$

Planetengetriebe einstufig $\eta \approx 0,985$

Planetengetriebe mehrstufig $\eta \approx 0,97$

Schneckengetriebe, versch. Übersetzungen $i = 5 \dots 170$ $\eta \approx 0,89 \dots 0,49$

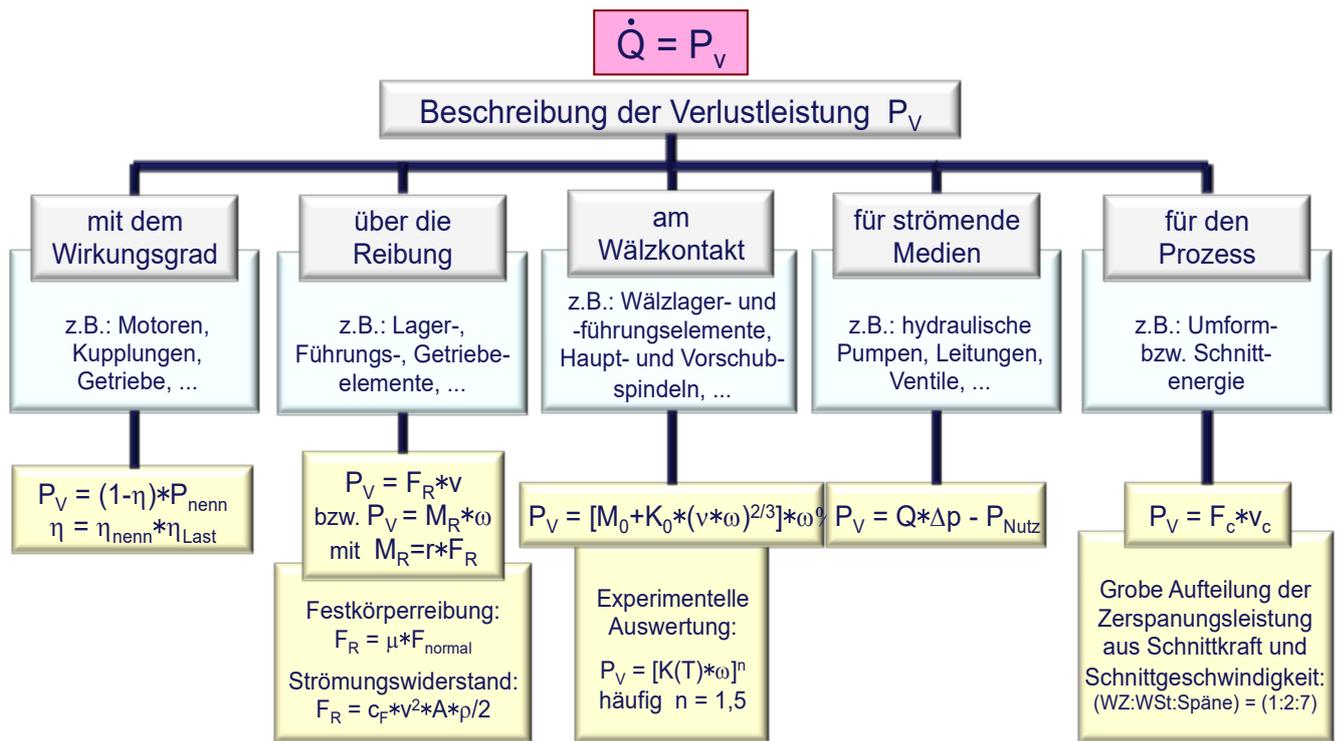


Bild 2.214 Thermische Lastbeschreibungen für den Wärmestrom aus der Verlustleistung

Für den Wirkungsgrad von *Hüll- und Reibradtrieben* finden sich folgende Werte.

Flachriemen Chromleder	$\eta \approx 0,96$
Flachriemen Elastomer-Laufschicht	$\eta \approx 0,98$
Keilriemen, einfach	$\eta \approx 0,95$
Keilriemen, mehrfach	$\eta \approx 0,9 \dots 0,94$
Keilrippenriemen	$\eta \approx 0,96$
Zahnriemen	$\eta \approx 0,96 \dots 0,98$
Kettengertriebe	$\eta \approx 0,97 \dots 0,98$
Kettenwandler (PIV-Getriebe)	$\eta \approx 0,93 \dots 0,96$
Reibradgetriebe	$\eta \approx 0,70 \dots 0,90$
Stufenloses Getriebe	$\eta \approx 0,90$

Für alle genannten Getriebe gilt im Mittel ein Teillastwirkungsgrad von $\eta_L = 1 - 0,6e^{-6f_L}$ mit dem Lastfaktor $f_L = P_{eff}/P_N$.

Den Wirkungsgrad unter Teillast erhält man dann aus

$$\eta = \eta_N * \eta_L.$$

Für *Wälzlager* geben die Hersteller Formeln zur Reibmomentberechnung nach Palmgren an.

Nach [27] gilt:

$$M_R = M_0 + M_1,$$

$$M_0 = 4501 * f_0 * d_m^3 * (v * \omega)^{2/3} \quad \text{für} \quad v * \omega \geq 2 * 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

$$M_0 = 16 * f_0 * d_m^3 \quad \text{für} \quad v * \omega < 2 * 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

$$M_1 = f_1 * F * d_m.$$

Dabei sind für die Größen in den Gleichungen für M_0 und M_1 folgende Dimensionen zu beachten:

- d_m [m] (Teilkreisdurchmesser)
- v [m^2/s]
- ω [1/s]

Die von der Lagerart und den Schmierungsverhältnissen abhängigen Beiwerte sind in Tabelle 2.10 zusammengestellt.

Lagerart	Beiwert f_0		Beiwert f_1
	Fettschmierung	Ölschmierung *)	
Rillenkugellager	1	2	0,00022
Schrägkugellager einreihig	2	3,3	0,00046
Schrägkugellager zweireihig	4	6,5	0,00046
Vierpunktlager	6	6	0,00046
Pendelrollenlager	6	6	0,00060
Kegelrollenlager	6	6	0,00040
Zylinderrollenlager mit Käfig	0,8	3	0,00030
Zylinderrollenlager vollrollig	5	5	0,00055
Nadellager	12	12	0,00200
Axial-Rillenkugellager	5,5	1,5	0,00037
Axial-Zylinderrollenlager	9	3,5	0,00150
Axial-Nadellager	14	5	0,00150

*) Die Werte gelten für Ölbad Schmierung; für Öl-Luft-Schmierung sind 50 %, für Ölbad Schmierung

- bei senkrechter Welle und Öleinspritzschmierung sind 200 % der Werte anzusetzen
- Der Beiwert f_0 gilt für Lagerbelastungen bei 10 % der dynamischen Tragzahl.
- Für eine genauere Berechnung des Reibmomentes siehe [28].

Tabelle 2.10 Beiwerte für die Faktoren f_0 und f_1

Für *Profilschienenführungen* mit abgedichteten Standardwagen mit Kugel- oder Rollenführung (die Dichtungsreibung beträgt ca. 50 %) gilt bei Vorspannungen von

$$F_v/C = 0,02 \dots 0,13 \text{ nach [10]:}$$

$$F_R = b * 10^3 * [0,46 + 0,66 * (F_v/C)^{2,5} + (0,46 + 5,2 * (F_v/C) * v)]$$

mit

- Reibkraft F_R in [N],
- Nennbreite der Führungsschiene b in [m],
- Geschwindigkeit v in [m/s].

Für *Kugelgewindetriebe* gilt abhängig von Kontaktverhältnissen und Vorspannung nach [10]:

- Kugelgewindemutter, Kugel im 4-Punkt-Kontakt, Einsatz radial vorgespannt

$$M_R = 4,52 * 10^5 d^{1,44} * d_{WK}^{1,33} * i * (F_v/C) \text{ bei } F_v/C = 0,02 \dots 0,05$$

- Kugelgewindemutter, Kugel im 2-Punkt-Kontakt, Einsatz als vorgespannte Doppelmutter

$$M_R = 1,79 * 10^5 d^{1,44} * d_{WK}^{1,33} * i * (F_v/C) \text{ bei.. } F_v/C = 0,07 \dots 0,1$$

- Beidseitige Mutterndichtung

$$M_R \approx 270d^2$$

- Zweireihiges Axial-Schrägkugellager, Festlager der Kugelgewindespindel-Lagerung

$$M_R \approx 80d^{1,75}$$

- Reibmoment M_R in $[Nm]$,
- Spindeldurchmesser d in $[m]$,
- Kugeldurchmesser d_{WK} in $[m]$,
- Anzahl der Kugelumläufe i ,
- Vorspannung F_v in $[N]$ und
- Dynamische Tragzahl C in $[N]$

2.2.3.3.3 Dynamische Lastbeschreibung

Die Anregung von Schwingungen an Werkzeugmaschinen kann verschiedene Ursachen haben.

Einmalige Stöße, die über die Aufstellung aus der Umgebung kommen können (z.B. von einer in der Nähe stehenden Schneidpresse) oder die von einer Unstetigkeit in der Härte des bearbeiteten Materials ausgelöst werden (z.B. einem Lunker im Guss) oder die Folge von ruckartigen Bewegungsvorgängen sind (z.B. der lineardirektgetriebenen Vorschubachsen), führen zu abklingenden *freien Schwingungen* in einer Eigenfrequenz.

Die sogenannten *fremderregten Schwingungen* haben ihre Ursachen in der Federkraft-, Stützen- und Unwuchterregung und erfolgen periodisch mit der Erregerfrequenz. In Bild 2.215 sind Beispiele für die wesentlichen Mechanismen der Federkrafterregung (Schnittkräfte, Antriebsschäden und Wälzlagerdefekte) aufgeführt. Die Unwuchterregung hat besonders für die hohen Drehzahlen bei der HSC-Bearbeitung große Bedeutung.

Selbsterregte Schwingungen haben ihre Ursache in der Instabilität des Zerspanungsprozesses oder der Regelkreise der Vorschubantriebe und erfolgen in der Nähe einer Eigenfrequenz.

Periodische Kraftverläufe fremderregter Schwingungen

Die periodischen Kraftverläufe $F_{Err} = F_0 * e^{j\Omega t}$ weisen eine $\Omega = 2\pi * f_{Err}$ aus, die einer Funktion der Drehzahl $f_{Err} = f(n)$ der Antriebsbaugruppe bzw. der Hauptspindel entspricht.

Antriebselemente – Federkraft

Für die Federkrafterregung $F_0 = konst.$ sind in Bild 2.216 typische Fehler in Antriebselementen und die Frequenzen f_{Err} der daraus resultierenden Erregerkräfte zusammengestellt.

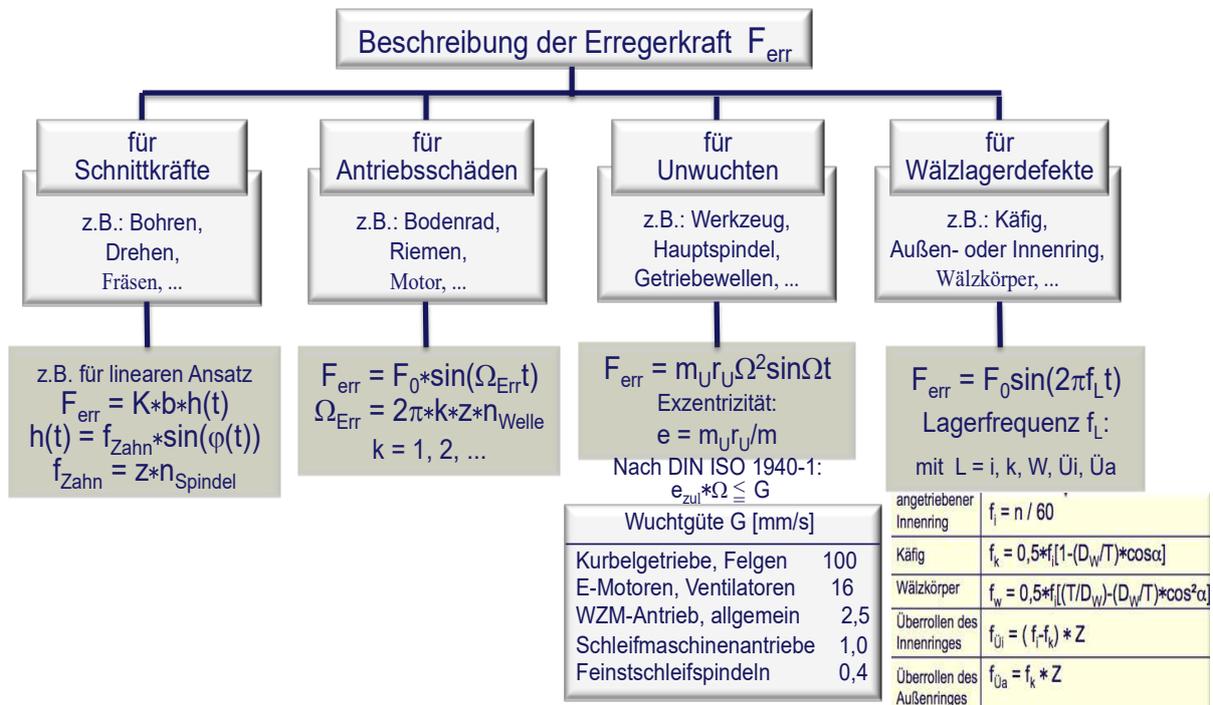


Bild 2.215 Dynamische Lastbeschreibungen für harmonische Erregerquellen an WZM

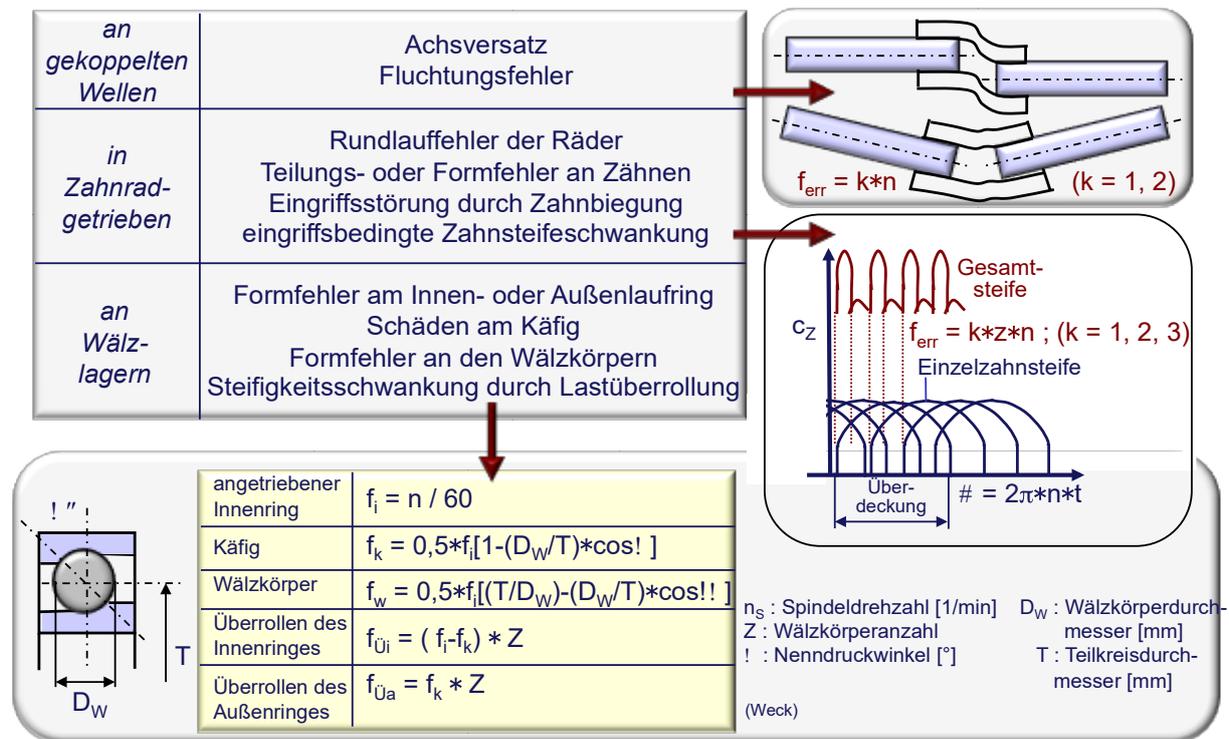


Bild 2.216 Federkrafterregung durch Fehler in Antriebselementen

Antriebs Elemente – Unwucht

Für die Unwuchterregung gilt $F_0 = m_U * r_U * \Omega^2$ und $f_{Err} = n$ (vgl. Abschnitt 2.1.3.3).

Dynamische Prozesskraft – Zerspanung

Für die dynamische Schnittkraft gelten zunächst dieselben Ansätze wie für die statische Prozesskraft (vgl. 2.2.2.4.1), nur mit einem zeitlich veränderlichen Spannungsquerschnitt, Bild 2.217.

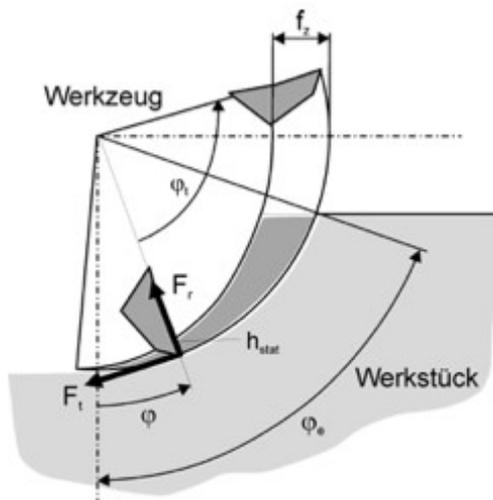


Bild 2.217 Schneideneingriff beim Umfangsfräsen nach [14]

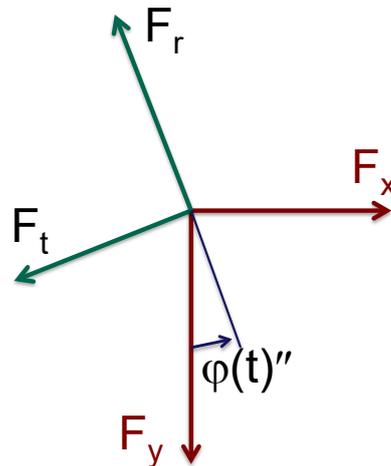


Bild 2.218 Transformation der Kräfte beim Umfangsfräsen

Deshalb ist $F_{0t,r} = b * k_{t,r1.1} * [f_z * \sin \varphi(t)]^{1-m} * K$ mit dem Zahnvorschub f_z und dem Vorschubrichtungswinkel φ . Über die Transformation von Bild 2.218 erhält man aus den rotierenden schneidenbezogenen Kräften die Kräfte im festen Maschinen-Koordinatensystem.

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_t \\ F_r \end{Bmatrix}$$

Die Kraftverläufe haben die Frequenz $f_{Err} = z * n$ mit der Schneidenanzahl z .

In Bild 2.219 sind die Ergebnisse für die Prozesskräfte im Maschinen-Koordinatensystem (x, y, z) für zwei verschiedenen Arbeitseingriffe $a_e = 2mm$, $a_e = 12mm$ angegeben. Es ist deutlich zu erkennen, dass die „Dynamik“ der Prozesskräfte von der Schneidenanzahl und vom Arbeitseingriff bzw. von der Schneidenüberdeckung abhängt.

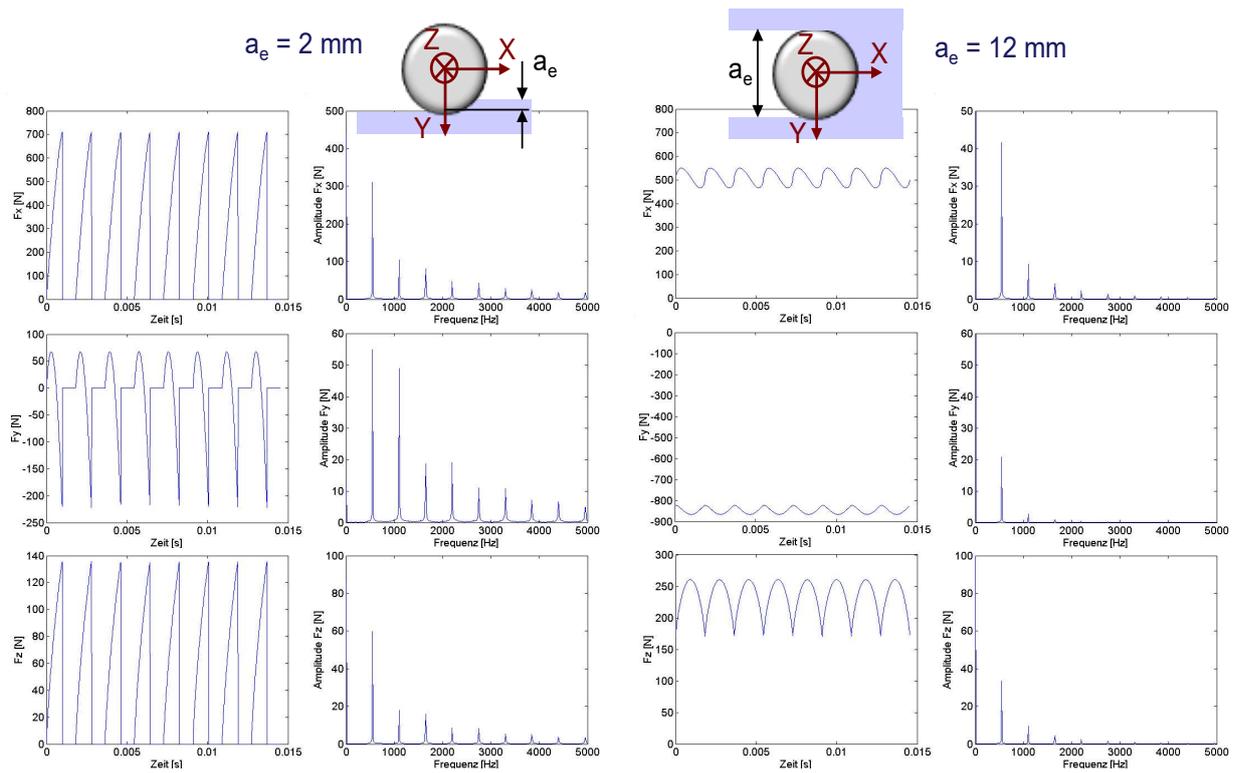


Bild 2.219 Zeitverläufe und Spektren der Zerspankräfte - für $a_e = 2\text{mm}$, $a_e = 12\text{mm}$

Bild 2.220 vergleicht die Verwendung eines Fräsers ohne Drall der Schneiden mit den Kraftergebnissen eines Werkzeugs mit Drall. Beim WZ mit Drall ist die Überdeckung der im Eingriff befindlichen Schneiden größer und deshalb der statische Anteil größer bzw. erst vorhanden.

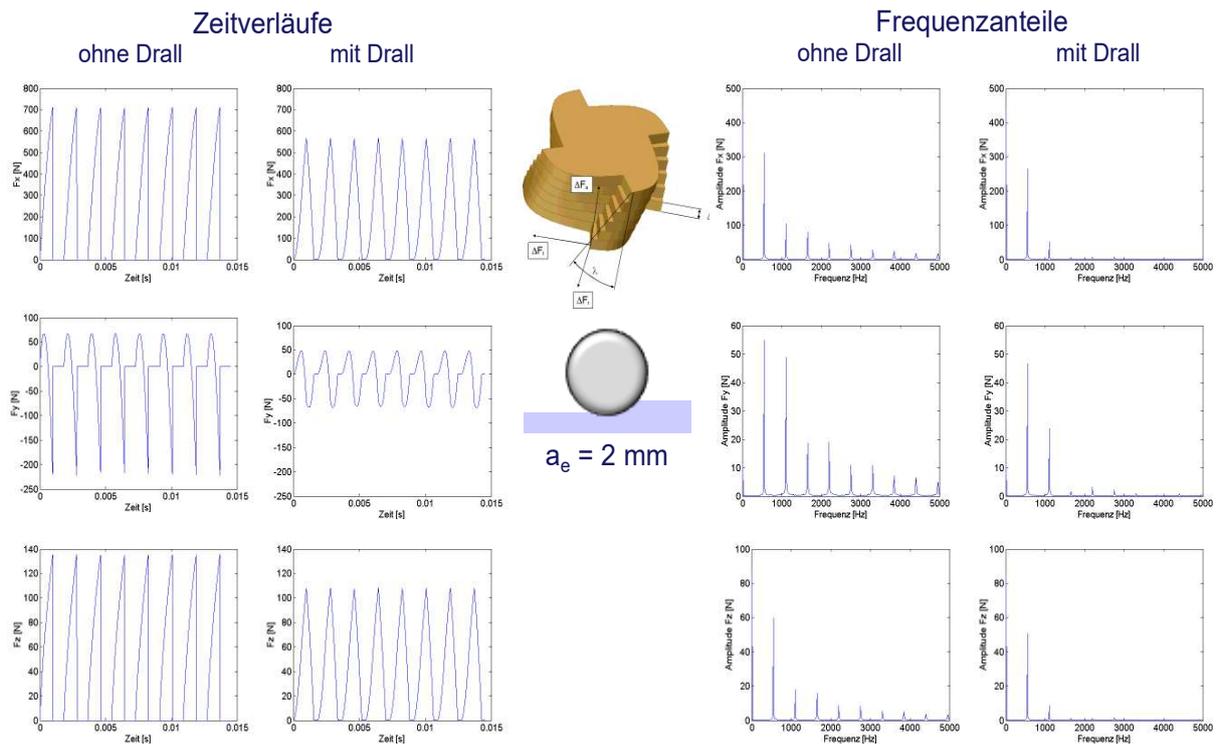


Bild 2.220 Zeitverläufe und Spektren der Zerspankräfte - Fräser ohne und mit Drall für $a_e = 2 \text{ mm}$

2.2.3.4 Verformungsmodelle und -berechnung

Das allgemeine Vorgehen zur Modellfindung (vgl. Abschnitt 2.1.3.1) auf das Problem der statischen Verformungsmodelle und -berechnung angewandt, führt auf die Konkretisierung von Bild 2.221.

Die Untersetzung der Bestandteile und Eigenschaften von Modellen zur Berechnung des statischen Verformungsverhaltens liefert Bild 2.222.

Aufgrund der relativ großen Systeme, die bei der Verformungsanalyse von WZM-Strukturen betrachtet werden müssen, kommen nur numerisch lösbare Modelle mit diskreten Zustandsgrößen (Lasten und Verformungen) und konzentrierten bzw. kontinuierlichen Parametern (Steifigkeiten) zur Anwendung, Bild 2.223.

Folglich stehen die Elementarten von Bild 2.224 zur Verfügung.

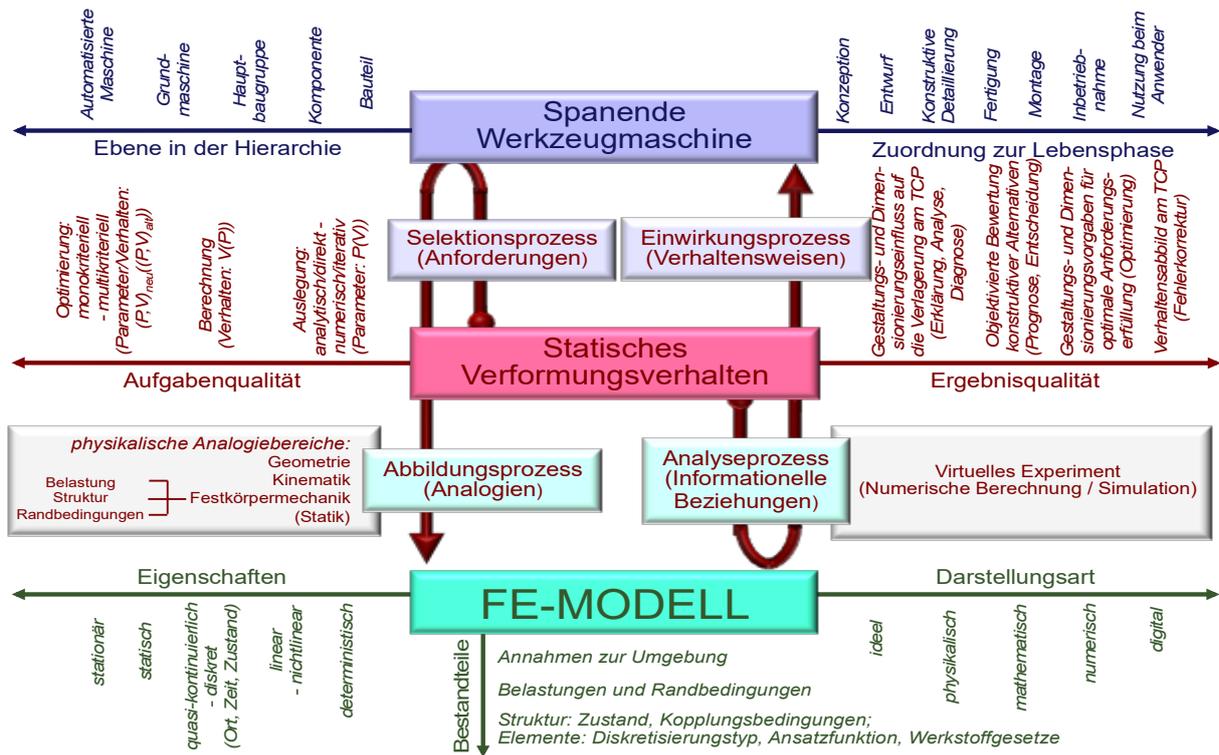


Bild 2.221 Modellfindung zur Analyse des statischen Verformungsverhaltens

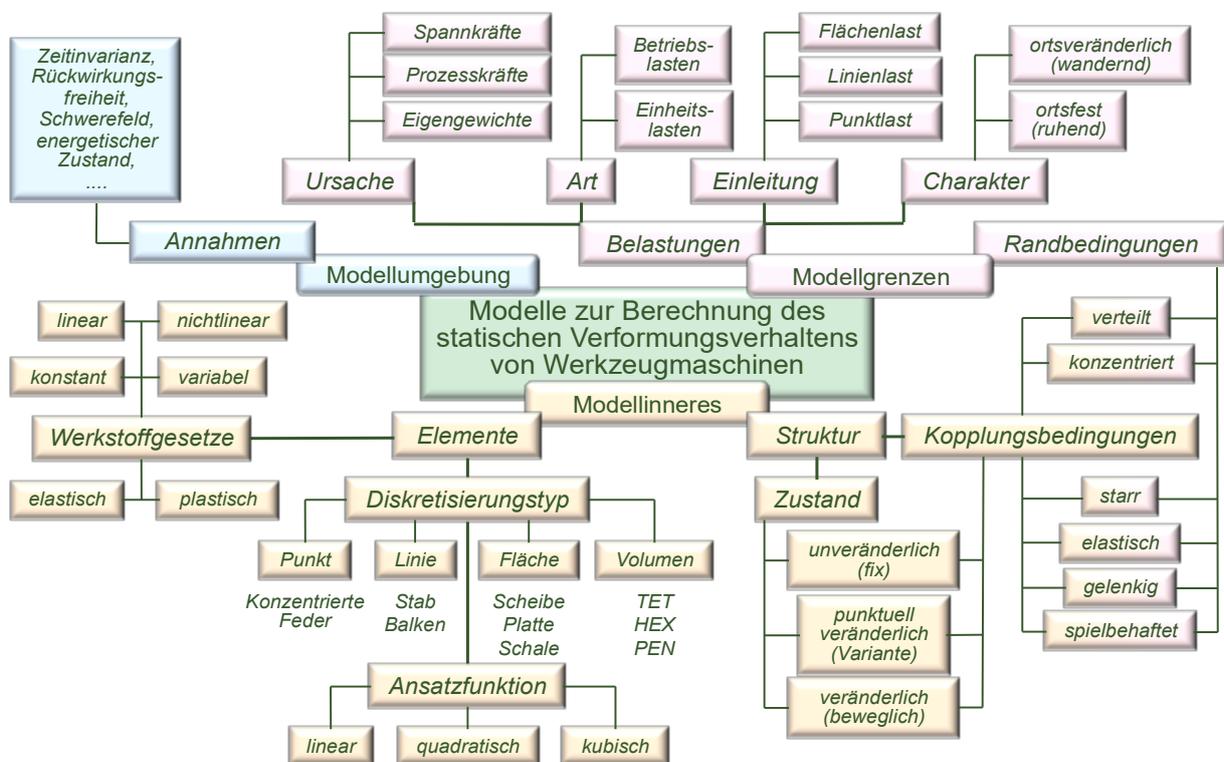


Bild 2.222 Bestandteile und Eigenschaften von Modellen zum statischen Verhalten

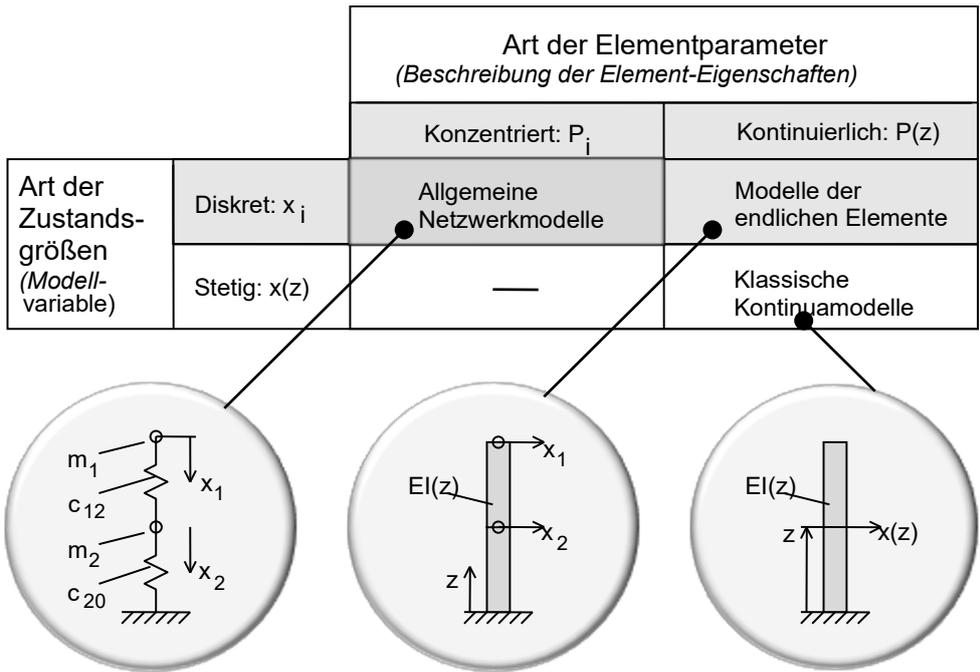
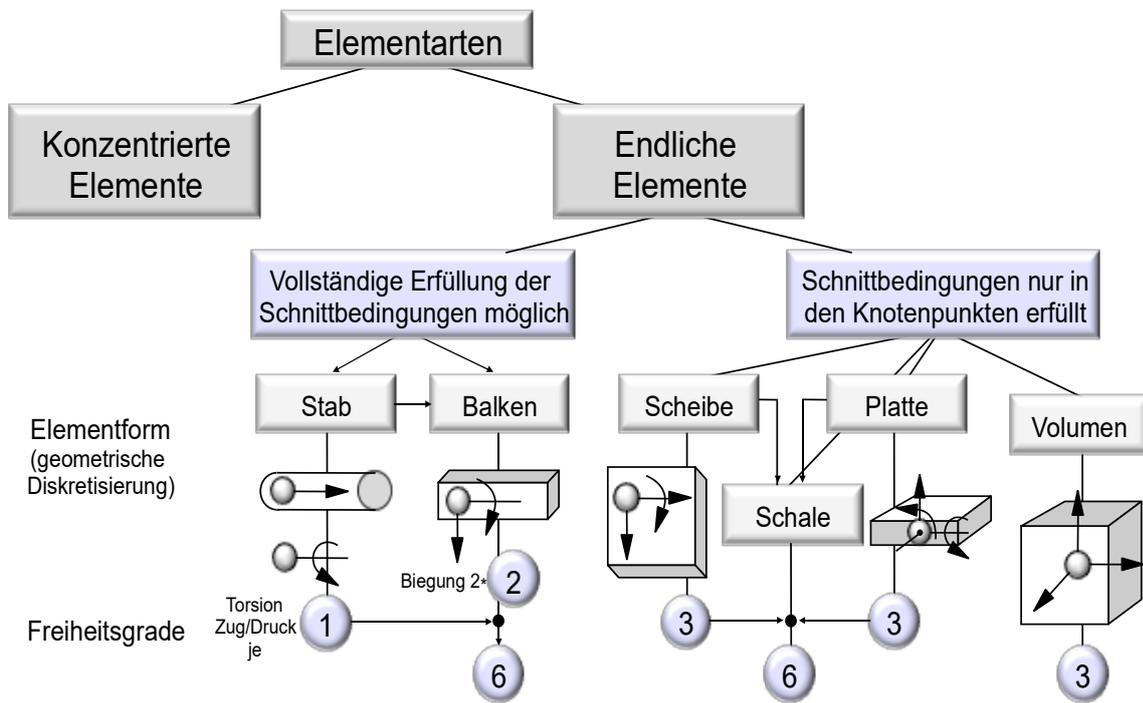


Bild 2.223 Zustandsgrößen- und Parameterbeschreibungsformen



Ansatzfunktionen linear, quadratisch, kubisch

Bild 2.224 Elementarten für diskrete Koordinaten

2.2.3.4.1 Modelle mit konzentrierten Elementen

Konzentrierte Steifigkeiten

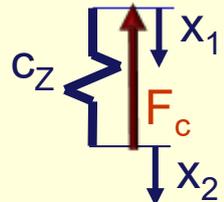
Ein Modell mit konzentrierten Elementen stellt für eine quasikontinuierliche Struktur den größten Abstraktionsgrad dar. In Bild 2.225 sind für Zug-Druck- und Torsions-Federn Anwendungsfelder, Symbolik und die Last-Verformungs-Beziehung zusammengestellt.

Zug-Druck-Feder

Abbildung des elastischen Zug-Druck-Verhaltens der Bauteile bei eindimensionaler Beanspruchung im Flächenschwerpunkt (in der Schwerelinie)

Abbildung der radialen und axialen Lager-Elastizitäten (unter Vorspannung!)

Abbildung der Normal- und Schubsteifigkeit von Flanschverbindungen (unter Vorspannung!)



$F_c = c_Z * (x_1 - x_2)$

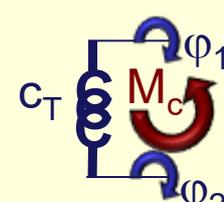


Torsionsfeder

Abbildung der Torsionssteifigkeit von Wellen und Kupplungen

Abbildung der Kippsteifigkeit von Lagersätzen

Abbildung der Kippsteifigkeit von Flanschverbindungen



$M_c = c_T * (\phi_1 - \phi_2)$

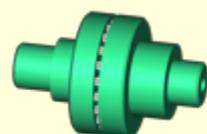
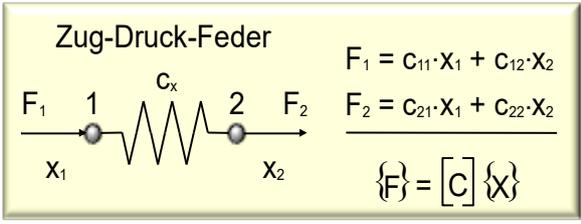


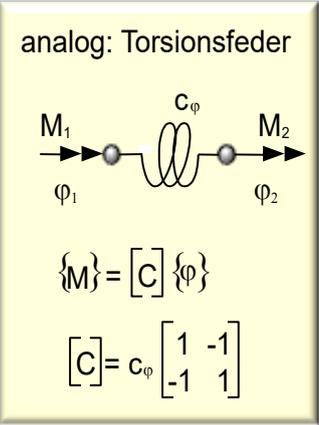
Bild 2.225 Elemente mit konzentrierten Steifigkeiten

Die Element-Matrix für das konzentrierte Steifigkeits-Element erhält man z.B. über die Deformationsmethode, Bild 2.226. Die Deformationsmethode ist eine allgemeine Methode zur Aufstellung von Steifigkeits-Elementmatrizen. Das methodische Vorgehen ist charakterisiert durch die nacheinander folgende Vorgabe von Einheitsdeformationen = 1 in allen Freiheitsgraden beim gleichzeitigen Nullsetzen = 0 aller anderen Freiheitsgrade und der Ermittlung der dafür erforderlichen Kräfte bzw. Momente am Elemente. Die ermittelten Lasten entsprechen den Elementen der Steifigkeits-Elementmatrix.

Das Bild 2.227 stellt einige Modellierungs- und Parametrierungsbeispiele für konzentrierte Federn zusammen.



$$[C] = c_x \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Deformationsmethode: $x_i := 1 ; x_j := 0 ; F_{ji} := c_{ji}$

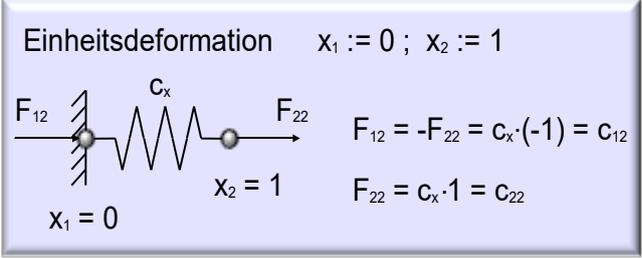
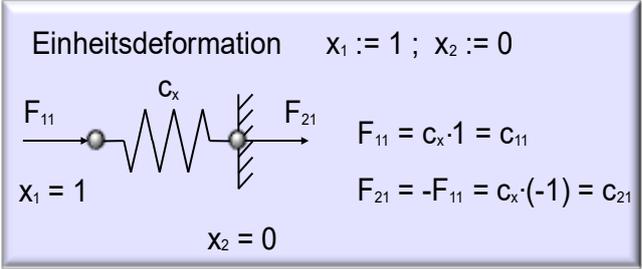


Bild 2.226 Aufstellung der Element-Steifigkeitsmatrix für konzentrierte Federn mit der Deformationsmethode

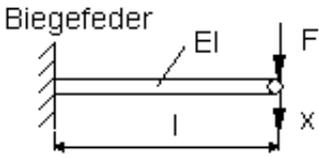
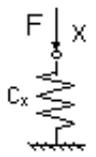
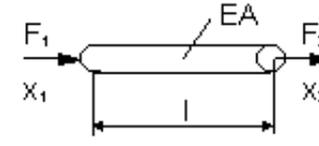
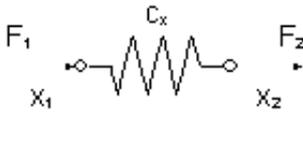
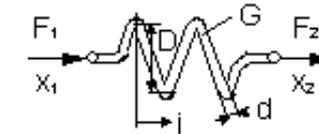
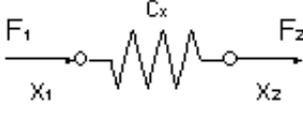
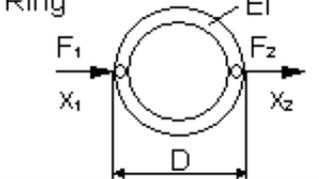
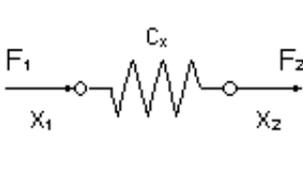
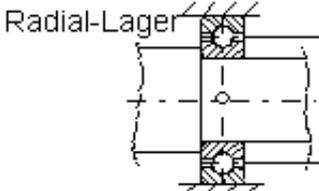
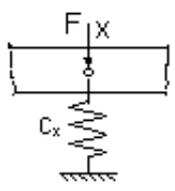
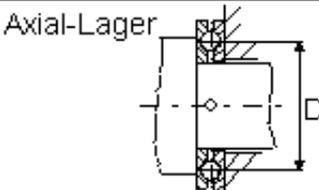
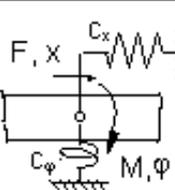
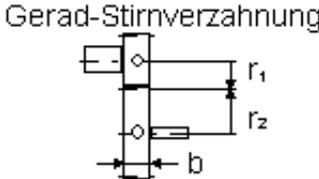
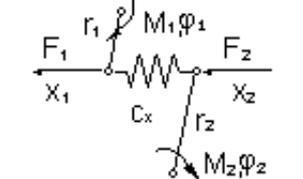
Real-Objekt	Modell-Objekt	Steifigkeits-Parameter
<p>Biegefeder</p> 		$C_x = \frac{3EI}{l^3}$
<p>Zug-Druck-Stab</p> 		$C_x = \frac{EA}{l}$
<p>Schraubenfeder</p> 		$C_x = \frac{d^4 G}{8i \cdot D^3 \cdot [1 - 3/16 \cdot (d/D)^2]}$
<p>Ring</p> 		$C_x = 54,03 \cdot \frac{EI}{D^3}$
<p>Radial-Lager</p> 		Katalogwerte
<p>Axial-Lager</p> 		Katalogwerte
<p>Gerad-Stirnverzahnung</p> 		<p>Richtwert:</p> $\bar{c}_z = 2 \cdot 10^7 \cdot b \quad b \text{ [mm]}$ $C_x = \bar{c}_z \quad \bar{c}_z \text{ [N/m]}$

Bild 2.227 Modellierungs- und Parametrierungsbeispiele für konzentrierte Federn - Teil 1

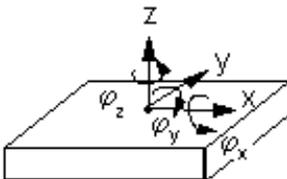
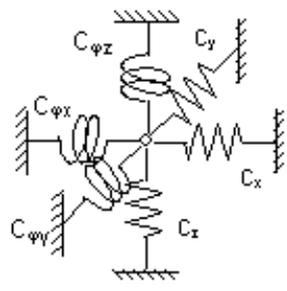
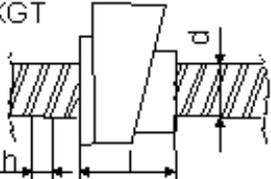
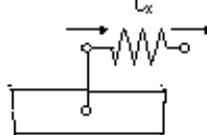
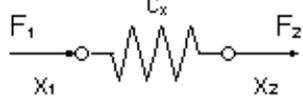
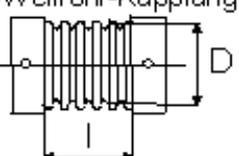
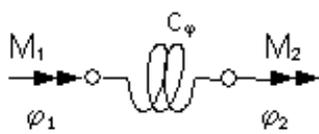
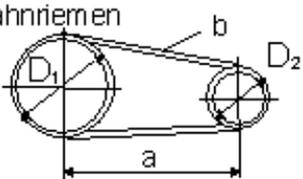
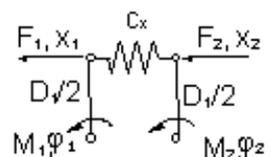
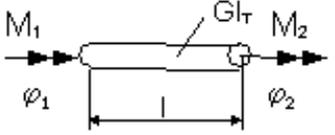
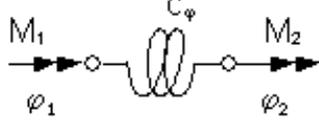
Real-Objekt	Modell-Objekt	Steifigkeits-Parameter
<p>Verschraubter Flansch</p> 		<p>Experimentelle Werte bzw. Näherungsrechnung für Normal(c_z)-, Schub(c_x, c_y)-, Kipp(c_{ϕ_x}, c_{ϕ_y})- und Torsions(c_{ϕ_z})steife</p>
<p>KGT</p> 		<p>$c_x \approx 24 \cdot d$ d [mm] c_x [N/μm]</p>
<p>Schraubenfeder</p> 		<p>$c_x = \frac{d^4 G}{8i \cdot D^3 \cdot [1 - 3/16 \cdot (d/D)^2]}$</p>
<p>Balg/Wellrohr-Kupplung</p> 		<p>Katalogwerte, z.B.: $D = 55, l = 36$; $c_\phi = 22000 \text{ Nm/rad}$</p>
<p>Zahnriemen</p> 		<p>Katalogwerte, z.B.: $a = 455, b = 32$; $c_x = 1200 \text{ N/mm}$</p>
<p>Torsionsstab</p> 		<p>$c_\phi = \frac{G I_T}{l}$</p>

Bild 2.228 Modellierungs- und Parametrierungsbeispiele für konzentrierte Federn - Teil 2

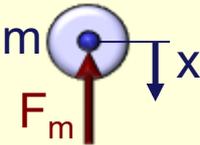
Konzentrierte Trägheiten

In Bild 2.229 sind für Punktmassen und Drehträgheiten Anwendungsfelder, Symbolik und die Last-Verformungs-Beziehung zusammengestellt.

Punktmasse

Abbildung der translatorischen Trägheit eines Starrkörpers (im Masseschwerpunkt!)

Abbildung von Massekonzentrationen, die anderweitig nicht geometrisch berücksichtigt sind und deren Elastizität vernachlässigt werden kann (z.B. Zahnräder auf Wellen, senkrecht zur Schwereachse liegende Wände bei Balkenmodellierung, angekoppelte Motore, ...)



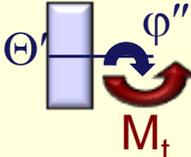
$F_m = m \cdot \ddot{x}$



Konzentrierte Drehträgheit

Abbildung der rotatorischen Trägheiten eines Starrkörpers (um die Trägheitshauptachsen!)

Abbildung der Dreh- und Neigungsträgheitswirkungen für Massekonzentrationen, die anderweitig nicht geometrisch berücksichtigt sind und deren Elastizität vernachlässigt werden kann (z.B. Zahnräder auf Wellen, senkrecht zur Schwereachse liegende Wände bei Balkenmodellierung, angekoppelte Motore, ...)



$M_t = \Theta \cdot \ddot{\varphi}$



Bild 2.229 Elemente mit konzentrierten Trägheiten

Auf die verschiedenen Möglichkeiten zur Bestimmung ersetzender konzentrierter Trägheiten wird im Zusammenhang mit der Diskretisierung (vgl. Abschnitt 2.1.3) eingegangen.

2.2.3.4.2 Modelle mit endlichen Elementen

Das Grundprinzip der Modelle endlicher Elemente besteht darin, dass basierend auf diskreten Freiheitsgraden als lokale Koordinaten in Knotenpunkten am Elementrand die kontinuierlich verteilten Steifigkeits- und Trägheitseigenschaften im Innern des Elements beschrieben werden. Die Realisierung dieses Prinzip erfolgt über geeignete Verformungsansätze, nach denen Gleichungen in Bild 2.230, und mit der Deformationsmethode, Bild 2.231, oder über Energieäquivalenzen nach Gleichung (2.71) für translatorische Trägheit bzw. nach Gleichung (2.72) für rotatorische Trägheit.

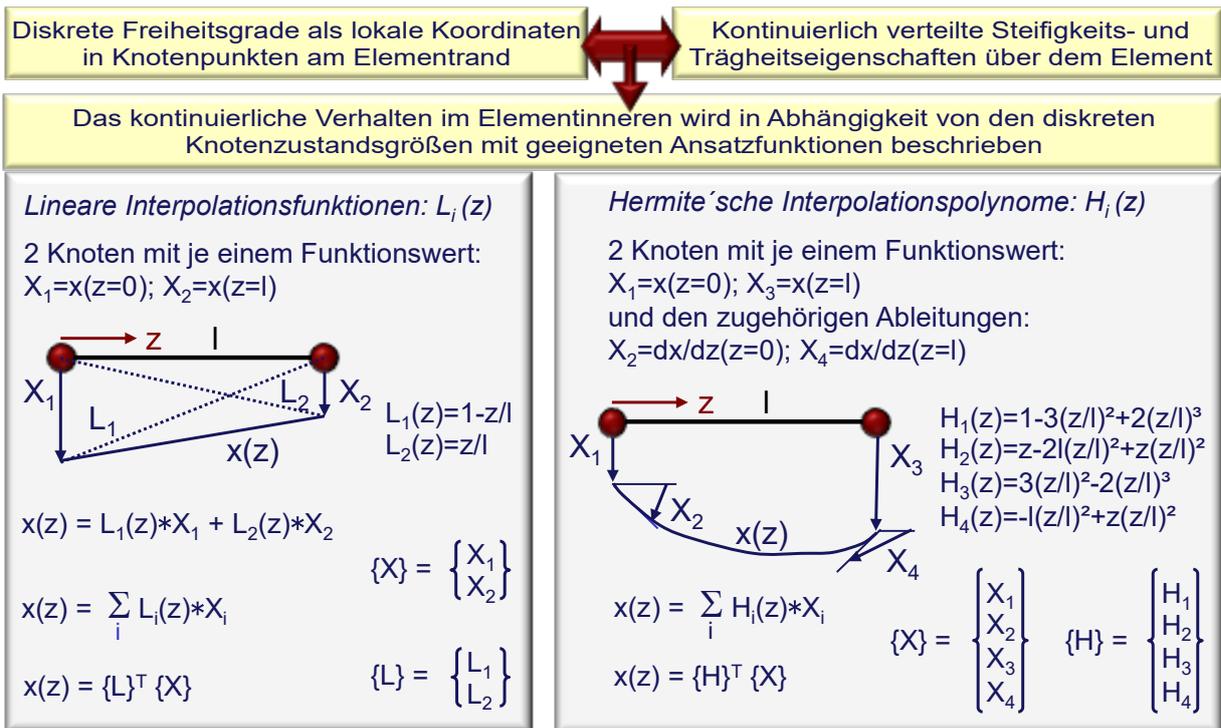


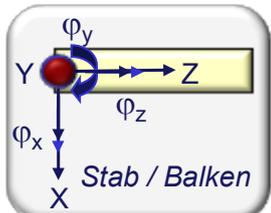
Bild 2.230 Ansatzfunktionen für den Verformungsverlauf im Inneren der Elemente

Ableitung der Steifigkeitsmatrix mit Einheitsdeformationen (entsprechend konzentrierte Feder)

Zug-Druck-Stab

$EA * z(z) = -F_z(z)$

E: Elastizitätsmodul
A: Querschnittsfläche



Stab / Balken

Torsions-Stab

$\frac{EJ_T}{2(1+\nu)*l} * \varphi_z(z) = -M_z(z)$

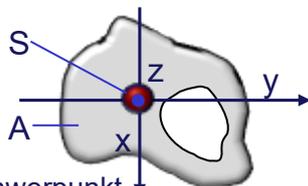
J_T : Flächenträgheitsmoment / Torsion
 ν : Querkontraktion

Ebener Biegebalken mit Querkraftschub

$EJ_y * d(dx)/dz^2 = M_y(z) + l^2 \lambda * dF_x(z)/dz$

mit $\lambda = 2\kappa_x J_y (1+\nu) / l^2 A$

- 1
- 5
- 7
- 11
- 2
- 4
- 8
- 10



- S : Flächenschwerpunkt
- x,y : Hauptachsen der Flächenträgheitsmomente
- J_y : Flächenträgheitsmoment / Biegung um y
- κ_x : Schubfaktor in Richtung x

Allgemeiner räumlicher Balken



$\{X_1 \ Y_1 \ Z_1 \ \varphi_{x1} \ \varphi_{y1} \ \varphi_{z1} \ X_2 \ Y_2 \ Z_2 \ \varphi_{x2} \ \varphi_{y2} \ \varphi_{z2}\}^T$
 $\{X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4 \ X_5 \ X_6 \ X_7 \ X_8 \ X_9 \ X_{10} \ X_{11} \ X_{12}\}^T$

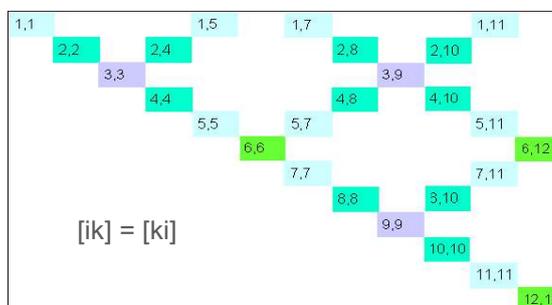


Bild 2.231 Elementmatrizen für verteilte Steifigkeit

Elementmatrizen für verteilte translatorische Trägheit werden wie folgt abgeleitet:

Kinetische Energie in diskreter und kontinuierlicher Formulierung:

$$T = \frac{1}{2} \{v\}^T [M] \{v\} = \frac{1}{2} \int_0^l \mu(z) * v(z)^2 dz$$

$$v = dx/dt, \quad x(t) = X * e^{j\omega t}, \quad v = j\omega x$$

$\{X\}$: Elementkoordinaten

$$T = \frac{\omega^2}{2} \{X\}^T [M] \{X\} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^l \mu(z) * x(z)^2 dz$$

Konstanter Querschnitt: $A, \quad \mu(z) = \mu = \rho A$

Verformungsansatz: $x(z) = \{P(z)\}^T \{X\}$

$$\{X\}^T [M] \{X\} = \rho * A \int_0^l \{P(z)\}^T \{X\} * \{P(z)\}^T \{X\} dz$$

Es gilt: $\{a\}^T \{b\} = \{b\}^T \{a\}$ sowie $\{X\}$ unabhängig von z

wegen $\{X\}^T [M] \{X\} = \{X\}^T \rho * A \int_0^l \{P(z)\} \{P(z)\}^T dz \{X\}$

folgt mit Gleichung (2.71) die Elementmatrix für verteilte translatorische Trägheit

$$[M]_{tra} = \rho * A \int_0^l \{P(z)\} \{P(z)\}^T dz \quad (2.71)$$

Die Elementmatrizen für die verteilte rotatorische Trägheit (Gleichung ((2.72)) werden analog zu den translatorischen Trägheiten abgeleitet.

Es ist $T = \frac{1}{2} \int_0^l \vartheta(z) * (d\varphi(z)/dt)^2 dz$

mit $\varphi(t) = \phi e^{j\omega t}, \quad d\varphi/dt = j\omega\phi,$

wobei $\{\phi\}$ die Elementkoordinaten enthält.

Konstanter Querschnitt: $A, \quad \vartheta(z) = \vartheta = \Theta/l$

Verformungsansatz: $\varphi(z) = \{Q(z)\}^T \{\phi\}$

Es gilt: $\{\phi\}$ unabhängig von z

$$[M]_{rot} = \Theta/l \int_0^l \{Q(z)\} \{Q(z)\}^T dz \quad (2.72)$$

Bild 2.232 und Bild 2.233 zeigen, wie die allgemeinen Bestimmungsbeziehungen mit den entsprechenden Verformungsansätzen für die Zug-Druck- und Torsionsstäbe bzw. für die Biegebalken ausgewertet werden.

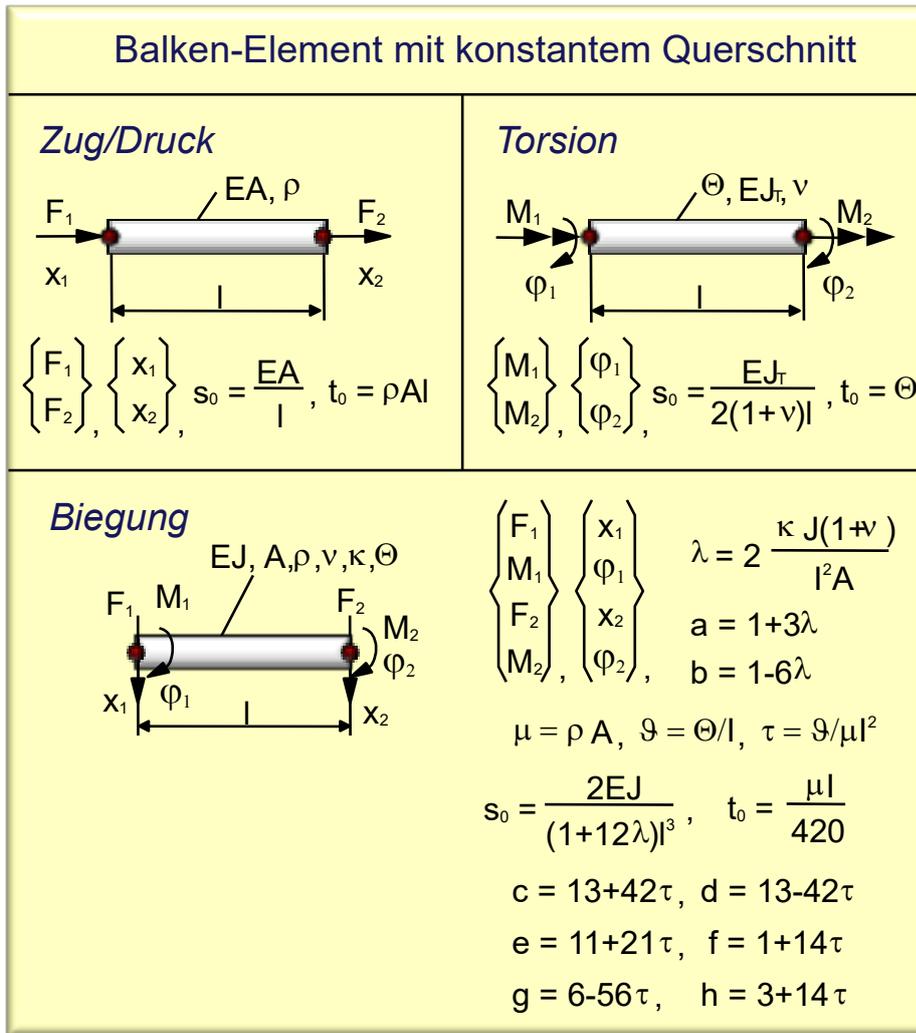


Bild 2.234 Steifigkeits- und Trägheits-Elementmatrizen für Balken-Elemente

Die Steifigkeits- und Trägheitsmatrizen gemäß Bild 2.234 für die Fälle Zug/Druck und Torsion folgen demnach als:

Fall Zug/Druck, Torsion:

Steifigkeitsmatrix $S_0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Trägheitsmatrix: $\frac{t_0}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Fall Biegung:

Steifigkeitsmatrix: $S_0 \begin{bmatrix} 6 & 3l & 6 & 3l \\ 3l & 2al^2 & -3l & bl^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & b^2 & 3l & 2al^2 \end{bmatrix}$

Trägheitsmatrix: $t_0 \begin{bmatrix} 12c & 2el & 9g & dl \\ 2el & 4fl^2 & dl & -hl^2 \\ 9g & dl & 12c & -2el \\ dl & hl^2 & 2el & 4fl^2 \end{bmatrix}$

(Anmerkung: bei den Matrizelementen sind die Multiplikationszeichen zwischen den Größen weggelassen)

2.2.3.4.3 Systemaufbau

Die, mit ihren Steifigkeits- und Trägheitseigenschaften beschriebenen, Elemente müssen zu der zu modellierenden Struktur zusammengesetzt werden. In Bild 2.235 sind die Grundlagen dazu schematisch abgebildet. Für die Beschreibung des Systemverhaltens existieren prinzipiell zwei Möglichkeiten, die Übertragungsfunktion $\mathbf{Ü}$, die den Zustand (x_1, F_1) von einem Knotenpunkt (1) an einen anderen (2) „überträgt“, und die Systemfunktion \mathbf{S} , die eine Art von Zustandsgrößen (x) aus einer anderen (F) für alle Knotenpunkte bestimmt. Wir wenden die Systemfunktion \mathbf{S} an, die für das statische Problem zur System-Steifigkeitsmatrix \mathbf{C} wird.

Bild 2.236 veranschaulicht schematisch, wie aus Elementen mit lokalen Koordinaten das System mit globalen Koordinaten wird. Die in diesem Prozess zu durchlaufenden Transformationen sind durch die Gleichungen (2.73) und (2.74) wiedergegeben.

Bild 2.237 demonstriert die Element-Verknüpfung an einem einfachen Beispiel.

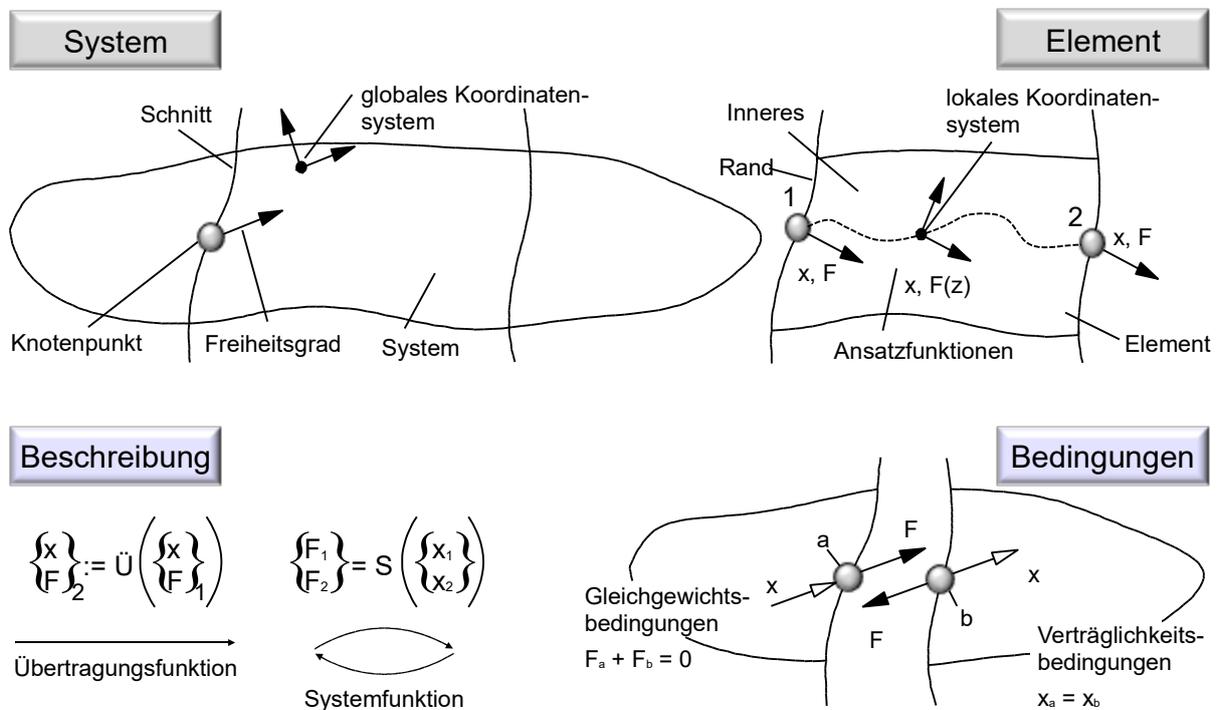
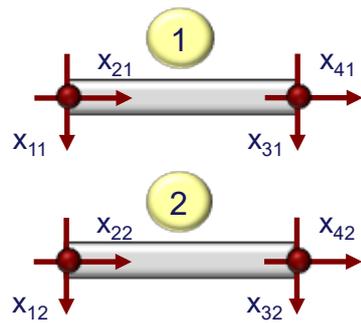


Bild 2.235 Modellierungsansatz: Schnittverfahren zur Element-System-Behandlung

Lokale Element-Koordinaten



Globale System-Koordinaten

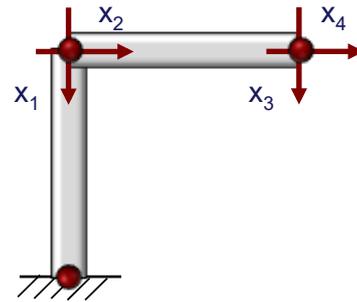


Bild 2.236 Lokale und globale Koordinaten

Transformation der Elementkoordinaten:

$\{x\}_r$: Element-Koordinaten des Elementes r

$\{z\} = \begin{Bmatrix} \{x\}_1 \\ \dots \\ \{x\}_m \end{Bmatrix}$: Elementkoordinaten aller Elemente des Systems, $r = 1, \dots, m$

$\{\bar{x}\}_r$: in Systemkoordinaten gedrehte ($[R]$) und verschobene ($[T]$) Element-Koordinaten des Elementes r

$$\{x\}_r = [T]_r [R]_r \{\bar{x}\}_r \quad (2.73)$$

$[T]_r$: Transformationsmatrix der Koordinatensystem-Verschiebung am Element r

$[R]_r$: Transformationsmatrix der Koordinatensystem-Rotation am Element r

$$\{z\} = \text{Diag}(T_r R_r) \{\bar{z}\} \quad (2.74)$$

$\{\bar{z}\}$: Elementkoordinaten aller Elementendes Systems, in die Systemkoordinaten gedreht und verschoben

Energiebilanz: $T = \sum_{r=1}^m T_r$

$$x^T [M] \{x\} = z^T \text{Diag}([M]_r) \{z\}$$

$$x^T [M] \{x\} = \{\bar{z}\}^T \text{Diag}([R]_r^T [T]_r^T [M]_r [T]_r [R]_r) \{\bar{z}\}$$

$$x^T [M] \{x\} = \{x\}^T [V]^T \text{Diag}([R]_r^T [T]_r^T [M]_r [T]_r [R]_r) [V] \{x\}$$

$$[M] = [V]^T \text{Diag}([R]_r^T [T]_r^T [M]_r [T]_r [R]_r) [V] \quad (2.76)$$

Mit den Gleichungen (2.75) und (2.76) sind die Bilanz der Potentiellen Energie für die System-Trägheitsmatrix und die Bilanz der kinetischen Energie für die System-Trägheitsmatrix bekannt.

2.2.3.4.4 Diskretisierung

Um mit „endlichen“ Elementen eine quasikontinuierliche Struktur zu beschreiben, muss zuvor die Elemententeilung festgelegt werden, die Struktur muss diskretisiert werden. Dabei gilt die oft angebrachte Regel: „nicht so wie möglich, sondern so wie nötig“. Das nötige Maß für die erforderliche Diskretisierung wird von den Last-, Verformungs- und Randbedingungen sowie von diskontinuierlichen Stellen im Eigenschaftsverlauf (z.B. Sprünge in der Geometrie, in den Querschnitts- oder den Werkstoffkennwerten) in der Struktur bestimmt. Darüber hinaus können feinere Unterteilungen notwendig werden, um bestimmte Erscheinungen (z.B. die Eigenschwingungsformen) besser abbilden zu können.

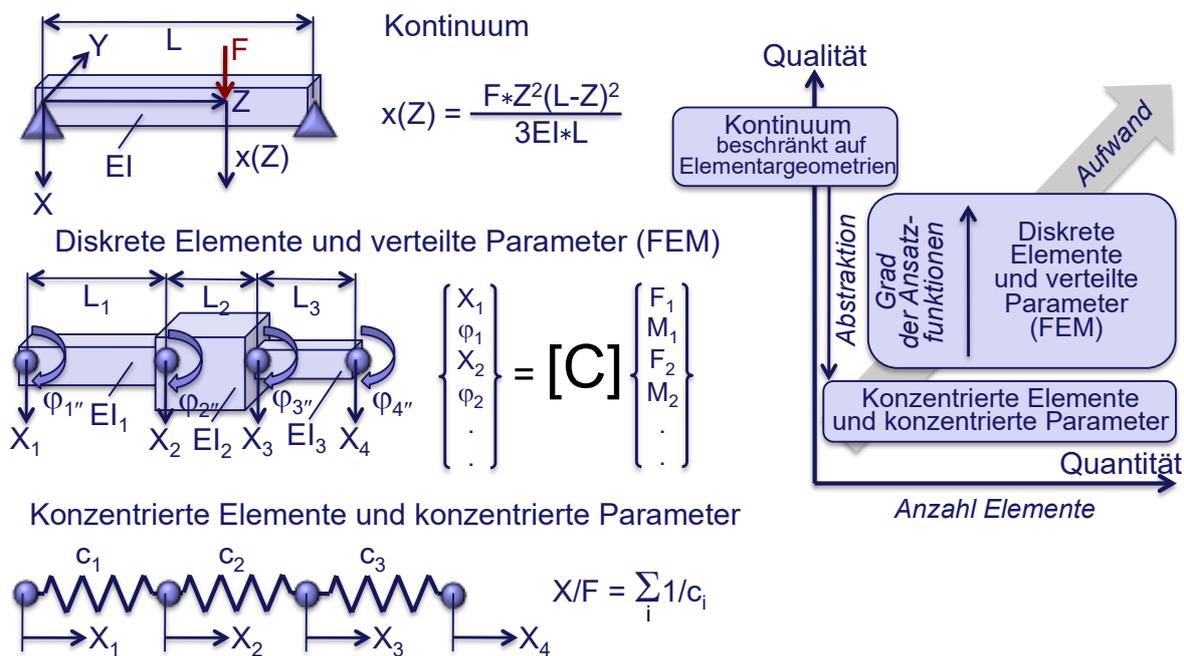


Bild 2.238 Modellarten zur Beschreibung des statischen Nachgiebigkeitsverhaltens

Bild 2.238 stellt noch einmal schematisch die Abstraktionsstufen der Verformungsmodelle und ihre Beschreibungsformen gegenüber.

Netzwerkmodelle

Das Diskretisierungsproblem stellt eines der Grundprobleme allgemeiner Netzwerkmodelle dar. Es geht dabei um die Frage, wie viele und welche verallgemeinerten Modellkoordinaten zur Beschreibung erforderlich sind. Da bei dem zugrunde gelegten Modellierungskonzept die Koordinaten in den potentialgrößentragenden Knoten „festgemacht“ sind, ist dies gleichzeitig die Frage nach der Knotenaufteilung. Zumindest große Teile der simulationsrelevanten technischen Systeme sind in ihrer realen Eigenschafts- und Parameterausprägung wenigstens abschnittsweise kontinuierlich. Eine Abbildung mit dem Knoten-Element-Konzept bedeutet daher in der Regel eine erhebliche Abstraktion, zumal die objektclassenabhängige Zuordnung einzelner physikalischer Wirkungen zusätzliche vereinfachende Annahmen enthält. Am einfachsten ist dies im Bereich der Mechanik am Beispiel der Modellobjekte der starren Punktmasse bzw. Drehrträge (Knoten) und der masselosen bzw. trägheitsfreien Feder (Element) zu sehen. Es sind also für den Entwurf eines diskretisierten Modells eine Reihe von Forderungen aus der physikalisch-verhaltensgerechten Eigenschaftsabbildung zu erwarten. Darüber hinaus bestehen jedoch weitere Ansprüche, die bei der Knoten- bzw. Koordinatenaufteilung zu erfüllen sind. So sind beispielsweise Koordinaten für die im Ergebnis interessierenden Zustandsgrößen oder für die Vorgabe von Randbedingungen zu berücksichtigen.

Modelle endlicher Elemente

Bild 2.239 stellt Gesichtspunkte zur funktionellen und strukturellen Diskretisierung zusammen und liefert Beispiele an Spindelsystemen und Gestellbaugruppen.

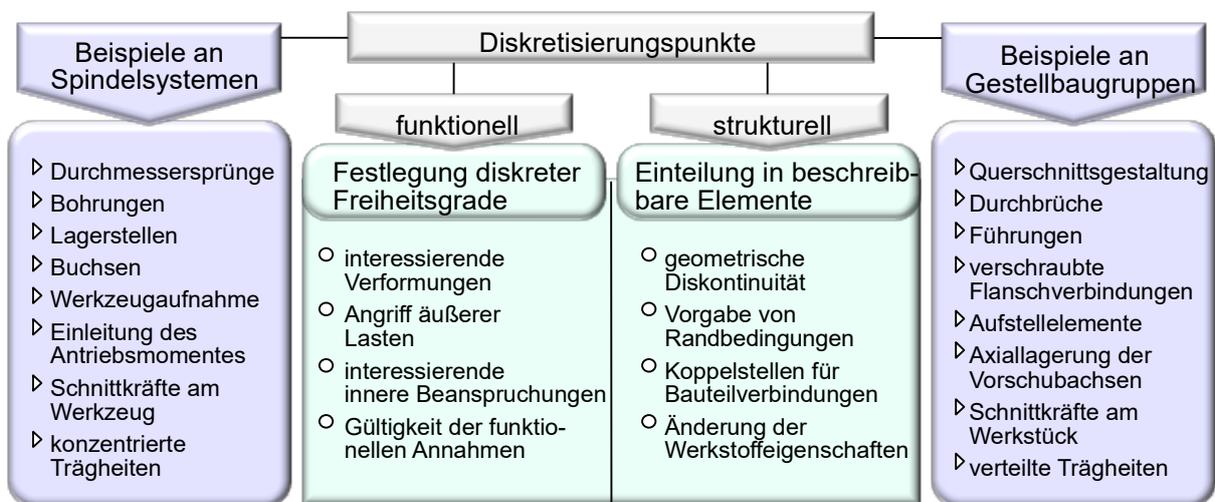


Bild 2.239 Gesichtspunkte zur funktionellen und strukturellen Diskretisierung

Allgemeines zur Parametrierung

Die Bestimmung der Parameter erfolgt anhand von Informationen aus dem Originalsystem und ist immer abhängig von der Struktur und der Funktionalität der Objekte des Modells, also der bei der Modellbildung auf das Original angewendeten Abstraktion - insbesondere natürlich abhängig von der vorgenommenen Diskretisierung.

Grundsätzlich kann man auf den folgend erläuterten vier verschiedenen Wegen zu den erforderlichen Modellparametern gelangen, wobei vielfach ein „Mix“ aus diesem Angebot praktiziert werden muss.

1. Ablesen

Insbesondere bei einer geräteorientierten Modellierung und Parametrierung kann ein Großteil der Parameter der Zulieferbaugruppen und Komponenten direkt den Katalog- bzw. sonstigen Herstellerangaben entnommen werden. Beispiele dafür liefern Wälzlager, Kupplungen, Getriebe, Elektromotoren oder Hydraulikzylinder.

2. Berechnen

Vorwiegend für Systembestandteile mit linearem Verhalten und einfachen geometrischen Verhältnissen können vor allem die Elastizitäts- und Trägheitsparameter aus den Geometrie- und Materialangaben der Konstruktionsunterlagen berechnet werden. Die Trägheiten von Starrkörpern oder die Steifigkeiten von Torsionswellen und Axialspindeln geben hierfür einfache Beispiele.

3. Messen

Viele der signifikant nichtlinearen Parameterabhängigkeiten sind nicht elementar berechenbar. Oft sind diese auch von den exemplarischen Einbauverhältnissen oder den konkreten Betriebs- oder Umgebungsbedingungen abhängig. Liegen in solch einem Fall zudem keine oder nur unzureichend aussagefähige Herstellerangaben vor und ist das reale Objekt für eine Messung verfügbar sowie in ausreichendem Maße zugänglich, dann hilft für die Parameterbeschaffung nur noch das gezielte Experiment weiter.

4. Schätzen

Befinden wir uns in der Entwurfsphase und sind weder Berechnungen möglich noch Herstellerangaben beschaffbar, so werden wir die betreffenden Parameter abschätzen müssen. In aller Regel sollten dies Grenzwertabschätzungen in Verbindung mit einer Einflussanalyse sein. Ein derartiges Vorgehen ist auch sinnvoll, wenn aufgrund zu erwartender Toleranzen oder anderweitig begründeter Streuungen die sichere Reproduzierbarkeit der Parameterwerte oder -abhängigkeiten gefährdet scheint.

Diskretisierung der Steifigkeitseigenschaften

Bei der Balkenmodellierung gibt es im Zusammenhang mit der Diskretisierung einige Probleme. Bild 2.240 demonstriert wesentliche dieser Probleme, die die Verwendung sogenannter Starrelemente erfordern [13]. Starrelemente bewirken eine Knotentransformation.

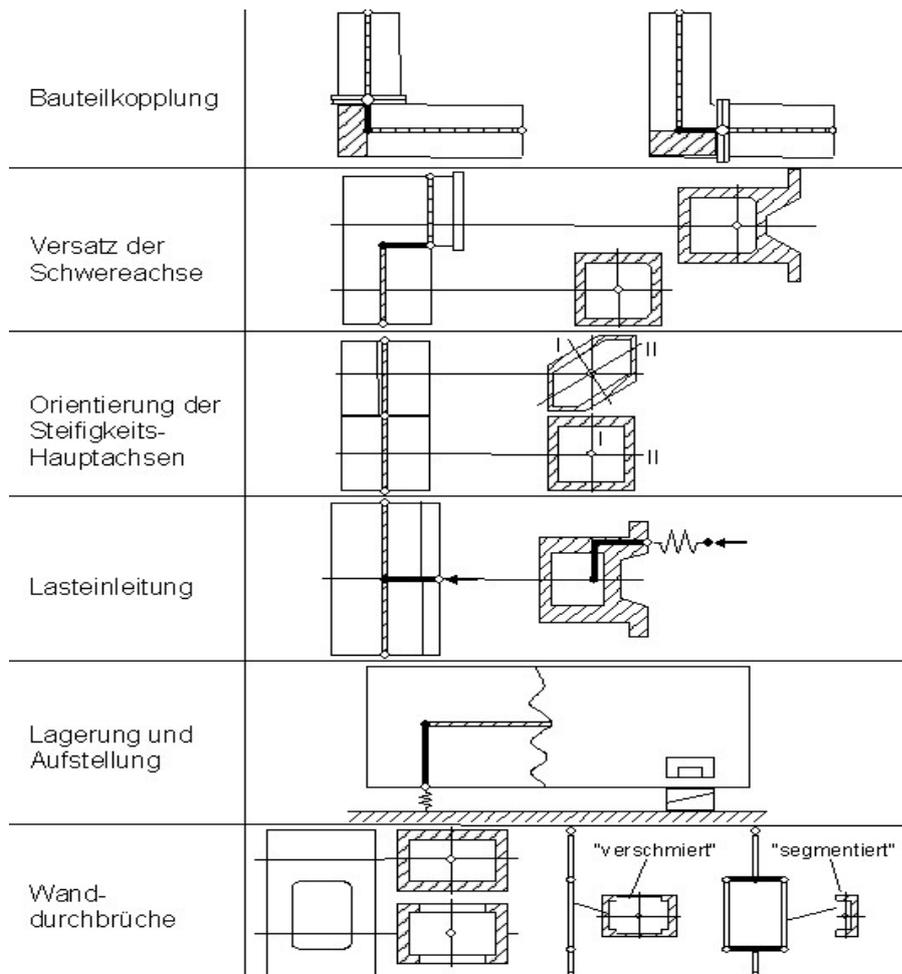


Bild 2.240 Diskretisierungsprobleme bei Balkenmodellen

Diskretisierung der Trägheitseigenschaften

Die einfachste aber auch die extreme Beschreibung der Trägheitseigenschaften ist die als formal gebildete konzentrierte Trägheit, Bild 2.241. Bei der formalen Diskretisierung wird die Masse durch die Knotenanzahl des Elementes geteilt und diese Teilmasse den Knoten als Punktmasse zugewiesen. Damit können bei grober Diskretisierung (relativ wenig Elemente) erhebliche Fehler auftreten. In Bild 2.242 ist die eigentlich zur Bestimmung der ersetzenden konzentrierten Masse interessierende Frage gestellt.

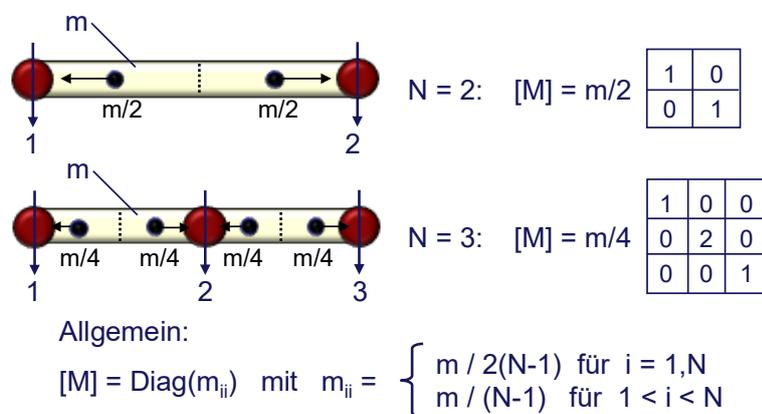


Bild 2.241 Formale Diskretisierung und Trägheitskonzentration

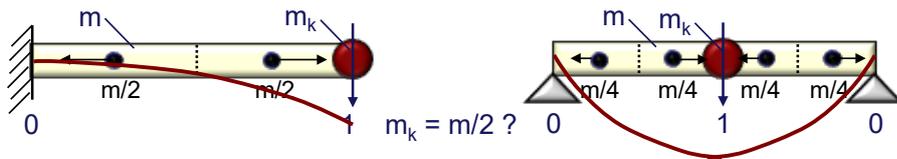


Bild 2.242 Wieviel (konzentrierte) Masse schwingt „tatsächlich“ mit der (diskreten) Koordinate?

Eine objektive Basis für die Beantwortung dieser Frage besteht in der Äquivalenz der kinetischen Energie, wie in Bild 2.243 dargestellt und in Gleichung (2.77) abgeleitet ist.

Grundlage für die Berechnung ersetzender konzentrierter Trägheiten bildet die *kinetische Energie*



Bild 2.243 Ersetzende Punktmassen für kontinuierlich verteilte Trägheiten

$$\frac{1}{2} m_k * v_k(t)^2 = T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu(z) * v(z,t)^2 dz$$

$$v(z,t) = dx(z,t)/dt, \quad x(z,t) = x(z)e^{j\omega t}, \quad v(z,t) = j\omega x(z), \quad v_k(t) = j\omega x_k$$

$$\frac{1}{2} m_k * \omega^2 * x_k^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \mu(z) * x(z)^2 dz$$

$$m_k = \int_0^l \mu(z) * \left(\frac{x(z)}{x_k} \right)^2 dz \quad (2.77)$$

Mit Bild 2.244 sind Beispiele für die Auswertung des Integrals (Gleichung (2.77)) für konkrete Verformungsverläufe gezeigt.

Wegen $\mu(z) = m/l = \text{const.}$ kann Gleichung (2.77) als

$$\frac{m_k}{m} = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{x(z)}{x_k} \right)^2 dz \quad (2.78)$$

umgeformt werden.

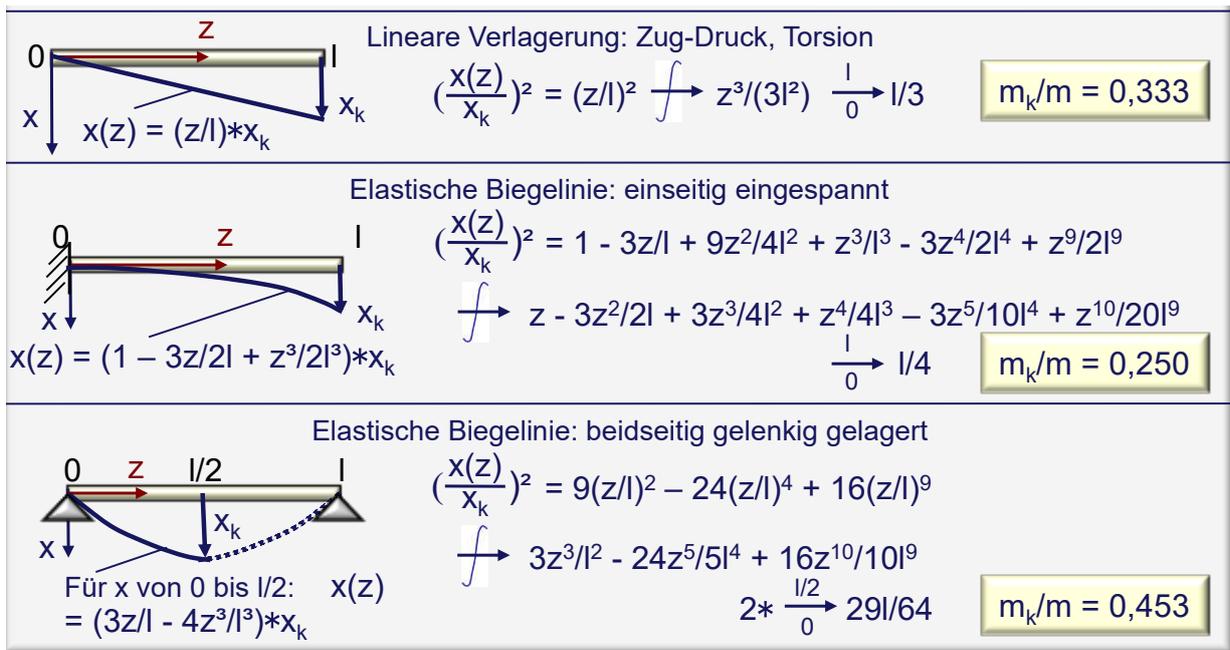


Bild 2.244 Beispiele zur Berechnung ersetzender Punktmassen

Es gibt auch einen eher pragmatischen Zugang zum Problem der Bestimmung ersetzender Parameter, z.B. mit der Gleichsetzung der Steifigkeit und Eigenfrequenz, Bild 2.245.

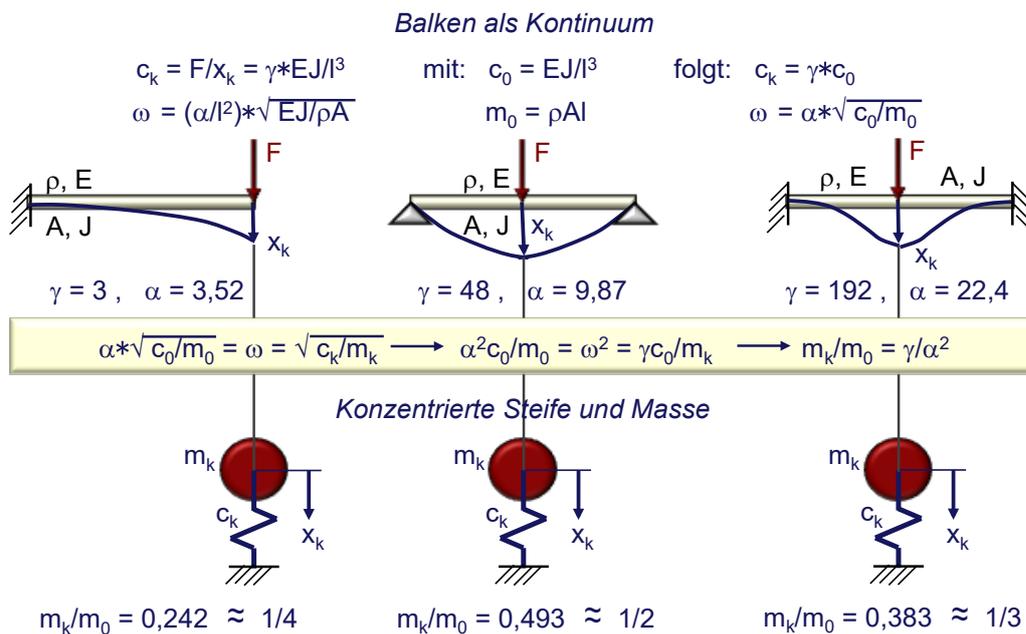
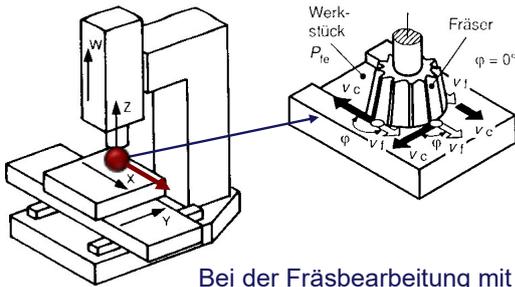


Bild 2.245 Ersetzende Parameter für identische statische Verformung und Eigenfrequenz

Das folgende Beispiel demonstriert die große praktische Bedeutung der Bestimmung ersetzender Parameter, Bild 2.246.

Problem

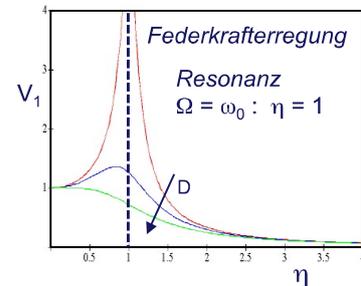


Bei der Fräsbearbeitung mit einem Messerkopf mit einer Schneidenzahl von $z_1 = 13$ und einer Masse $m_1 = 12$ kg treten bei der Drehzahl $n_1 = 355 \text{ min}^{-1}$ starke Schwingungen (Resonanz) am Werkzeug in x-Richtung auf. Ein statischer Belastungsversuch an der Spindelnahe ergibt eine Steifigkeit in x-Richtung von $c_x = 5 \text{ N}/\mu\text{m}$.

Wo liegt bei dieser Maschine die gefährdete Drehzahl n_2 für einen Messerkopf mit $z_2 = 11$ und $m_2 = 10$ kg?

Lösung

Anregungsmechanismus: periodische Schnittkraftschwankung mit der Frequenz des Schneideneingriffs (Federkrafterregung), größte Amplituden in der Resonanz



In der Resonanz gilt: $\omega_{err1} = \omega_{eig1}$

$$\omega_{err1} = 2\pi \cdot f_{err1} \quad \omega_{eig1} = \sqrt{c_x / m_{x1}}$$

$$f_{err1} = z_1 \cdot n_1 \quad m_{x1} = m_{Mers} + m_1$$

$$m_{Mers} = c_x / (2\pi \cdot z_1 \cdot n_1)^2 - m_1$$

$$n_2 = (\sqrt{c_x / (m_{Mers} + m_2)}) / (2\pi \cdot z_2)$$

$$\omega_{err1} = \omega_{eig1} = 483,3 \text{ s}^{-1}, \quad m_{x1} = 21,41 \text{ kg}, \quad m_{Mers} = 9,41 \text{ kg}, \quad \omega_{err2} = \omega_{eig2} = 507,5 \text{ s}^{-1}$$

$$n_2 = 440,6 \text{ min}^{-1}$$

Bild 2.246 Beispiel für die Anwendung ersetzender Parameter

Die folgenden zwei Beispiele sollen anhand einer stark vereinfachten Gestell- und einer Spindelstruktur typische Modellierungsprobleme demonstrieren.

Zunächst soll der Einfluss unterschiedlicher Modellierung der winkligen Bauteilkopplung mit zwei ebenen Balken- bzw. Starrelementen und damit 6 Freiheitsgraden dargestellt werden, Bild 2.247. Als Referenz wurde ein Scheibenmodell mit 192 Elementen und 648 Freiheitsgraden verwendet. Berechnet wurden für horizontale Punktlast im Lasteinleitungsknoten die Verformungen (x, y, φ_x) und die ersten vier Eigenfrequenzen berechnet. Die Abweichungen der statischen Verformungen ist unakzeptabel groß. Dabei ist aber zu berücksichtigen, dass

das Referenzmodell unter der Punktlast unrealistische lokale Verformungen enthält. Ausgeglicher sind da die Abweichungen der Eigenfrequenzen. Bei einem Verhältnis der Modelldimensionen in der Größenordnung von 1:100 ist eine Abweichung von kleiner 12% bemerkenswert.

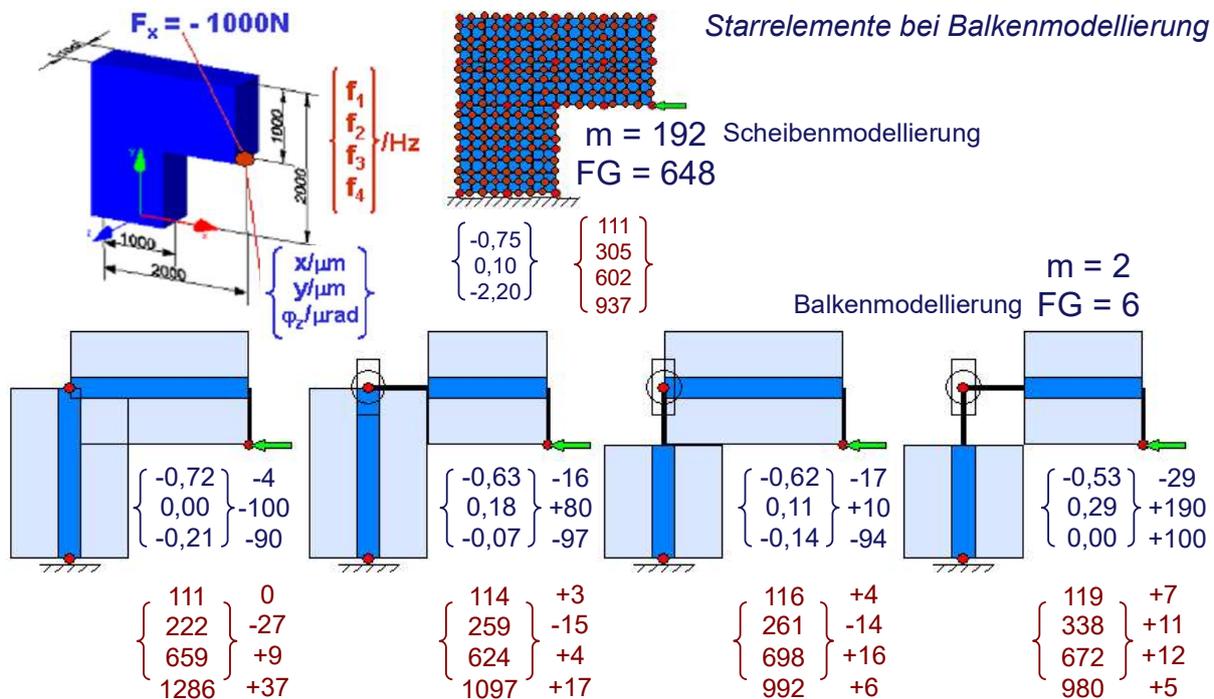


Bild 2.247 Diskretisierungseinfluss auf Verformung und Eigenfrequenz beim Balkenmodell einer Gestellstruktur

Bild 2.248 zeigt, dass eine feinere Diskretisierung (die formale Erhöhung der Anzahl der Elemente und Freiheitsgrade) nicht automatisch die Abweichungen der Verhaltensergebnisse reduziert. Zum Beispiel sind die Abweichungen der Eigenfrequenzen des Modells mit fünf Elementen und 30 Freiheitsgraden um fast die Hälfte kleiner als bei dem Modell mit acht Elementen und 36 Freiheitsgraden. Bei dem Beispiel ist die strukturbezogene Lokalisierung der feineren Diskretisierung entscheidend. Generell ist jedoch die Aussage treffend, dass eine feinere Elementaufteilung auch genauere Ergebnisse liefert. Bild 2.249 belegt dies, zeigt aber auch, dass eine Erhöhung der Freiheitsgradanzahl ab einer bestimmten Grenze (im Beispiel größer als 180) nur noch vernachlässigbare Verbesserungen bewirkt.

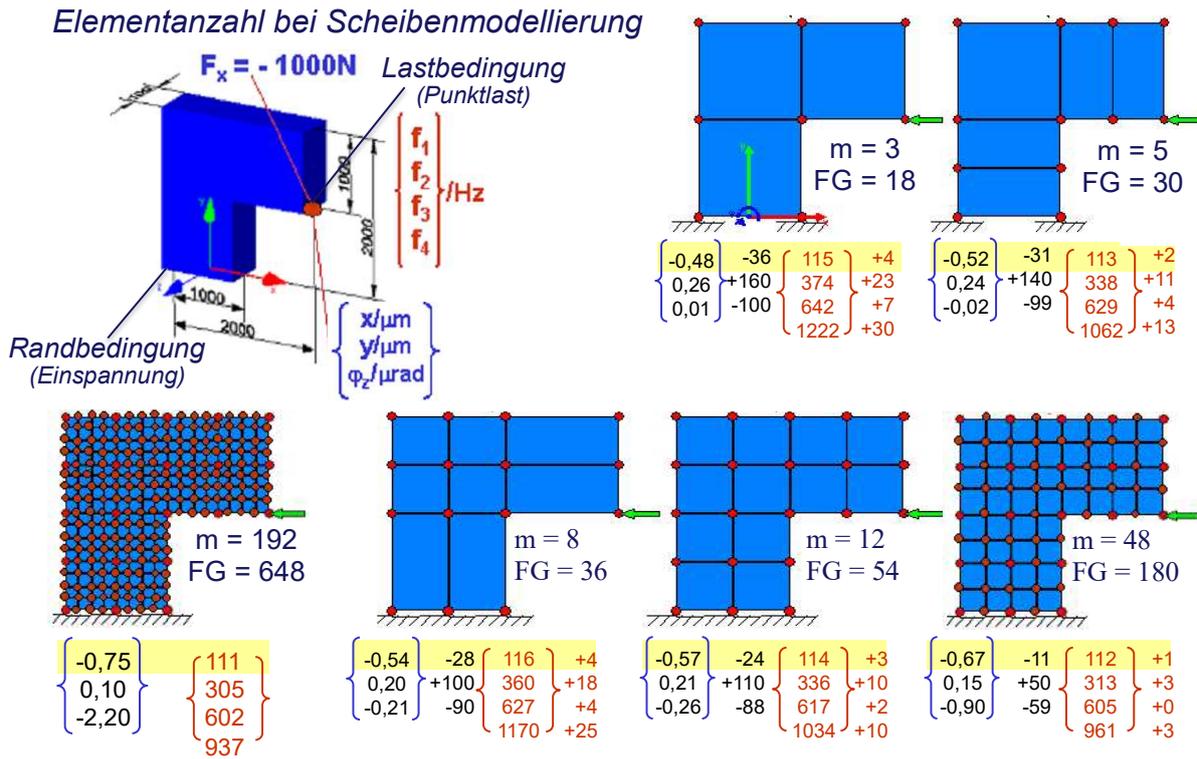


Bild 2.248 Diskretisierungseinfluss auf Verformung und Eigenfrequenz beim Scheibenmodell einer Gestellstruktur

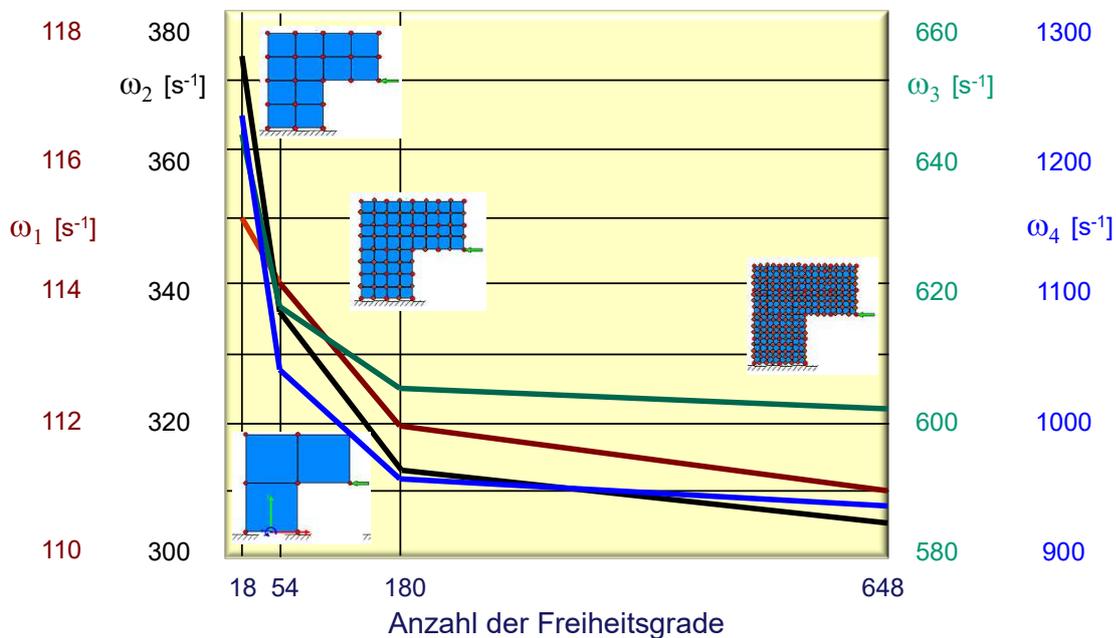


Bild 2.249 Vergleich des Diskretisierungseinfluss auf die Eigenfrequenz bei Scheibenmodellierung einer Gestellstruktur

Am Beispiel der vereinfachten Spindelstruktur soll der Einfluss der Modellfreiheitsgradanzahl, der Trägheitsmodellierung (konzentriert und verteilt) und der Werkzeugmasse (als schwerer

Messerkopf) gezeigt werden. In Bild 2.250 sind die untersuchten Modellierungsvarianten aufgeführt.

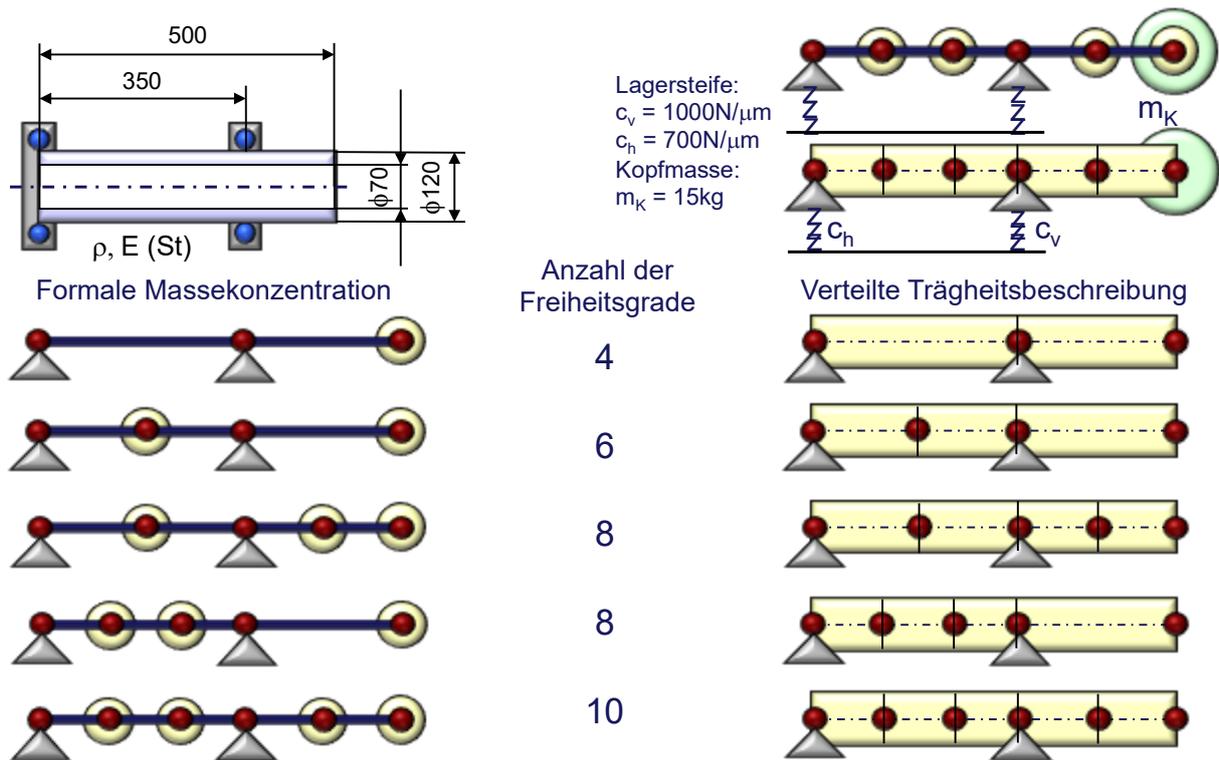


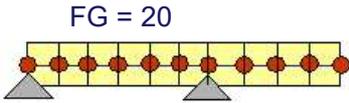
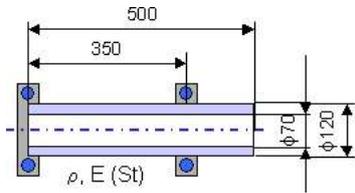
Bild 2.250 Diskretisierungsvarianten bei Balkenmodellierung einer Hauptspindel

Als Referenz wird ein Modell mit verteilter Trägheitsbeschreibung vom Freiheitsgrad 20 verwendet.

Bild 2.251 zeigt zunächst den Diskretisierungseinfluss auf die Eigenfrequenz bei konzentrierter Trägheit. Der grundsätzliche Genauigkeitserfolg mit steigender Freiheitsgradanzahl wird auch hier bestätigt. Die beiden Modelle mit dem Freiheitsgrad acht zeigen, dass eine modespezifische Trägheitsaufteilung existiert (Masse in Knotennähe der zugeordneten Schwingungsform ist wirkungslos, Masse in Bauchnähe ist von großem Einfluss). Die Ergebnisse verdeutlichen auch, dass der Einfluss der unterschiedlichen Modellierung wesentlich kleiner sein kann, als der Einfluss der Vernachlässigung bzw. Berücksichtigung der Werkzeugmasse.

Bild 2.252 macht deutlich, dass die verteilte Trägheitsbeschreibung gegenüber der konzentrierten bei gleicher Freiheitsgradanzahl deutlich geringere Abweichungen der vergleichbaren Eigenfrequenzen ausweist.

Hauptspindel
mit
Punktmassenmodellierung

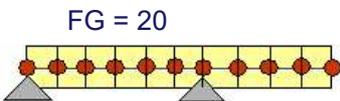
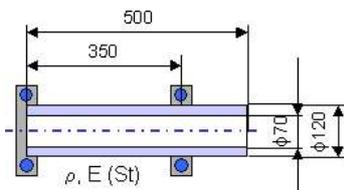


$\omega_1 = 1452 \text{ s}^{-1}$
 $\omega_2 = 2442 \text{ s}^{-1}$
 $\omega_3 = 4785 \text{ s}^{-1}$
 $\omega_4 = 6491 \text{ s}^{-1}$

	[1/s]	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
	[%]	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
	1149 -21				
	1343 -8	2260 -8			
	1485 +2	2407 -1	7640 +60		
	1342 -8	2341 -4	4849 -1		
	1488 +2	2486 +2	4856 +1	7641 +18	
	521	1270	3602	5437	

Bild 2.251 Diskretisierungseinfluss auf die Eigenfrequenz bei konzentrierter Trägheit

Hauptspindel
mit verteilter
Trägheitsmodellierung



$\omega_1 = 1452 \text{ s}^{-1}$
 $\omega_2 = 2442 \text{ s}^{-1}$
 $\omega_3 = 4785 \text{ s}^{-1}$
 $\omega_4 = 6491 \text{ s}^{-1}$

	[1/s]	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
	[%]	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
	1526 +5	3471 +42	9365 +96	16138 +149	
	1462 +1	2479 +2	9068 +90	12805 +97	
	1460 +1	2476 +1	6509 +36	9126 +40	
	1457 +0	2461 +1	4902 +2	14680 +126	
	1455 +0	2458 +1	4904 +2	6510 +0	
	513	1137	2422	4032	

Bild 2.252 Diskretisierungseinfluss auf die Eigenfrequenz bei verteilter Trägheit

Im Bild 2.253 sind die ersten beiden Eigenfrequenzen über der Anzahl der Freiheitsgrade für die beiden Varianten der Trägheitsbeschreibung dargestellt. Die Darstellung zeigt, dass für

die ersten beiden Eigenfrequenzen eine feinere Diskretisierung mit mehr als zehn (konzentrierte Massen) bzw. sechs (verteilte Trägheit) Freiheitsgraden keinen wesentlichen Genauigkeitsgewinn mehr bringt.

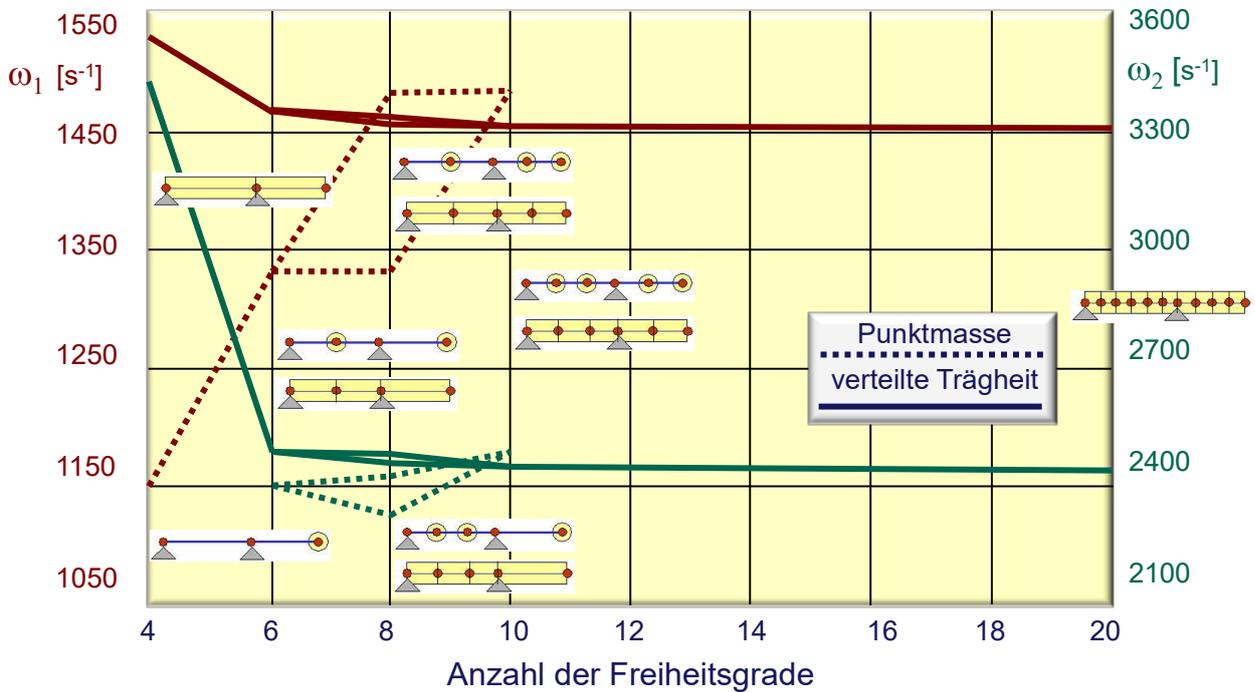


Bild 2.253 Vergleich der Trägheitsmodellierung an der Hauptspindel hinsichtlich der Eigenfrequenz

2.2.3.4.5 Statischer Bereich

Die Grundbeziehung zwischen den statischen Lasten und den Verformungen vermittelt die Steifigkeitsmatrix, Bild 2.254. Die gesuchten Verformungen an einem vollständig gefesselten System erhält man aus der Multiplikation der inversen Steifigkeitsmatrix mit dem Lastvektor.

$\{f\} = [C] \{x\}$	$\{f\}$: Lastvektor $\{x\}$: Verformungsvektor $[C]$: Steifigkeitsmatrix	$\{x\} = [C]^{-1} \{f\}$	$[C]^{-1}$: Inverse Steifigkeitsmatrix = $[N]$: Nachgiebigkeitsmatrix = $[\alpha]$: Matrix der Einflusszahlen
---------------------	---	--------------------------	--

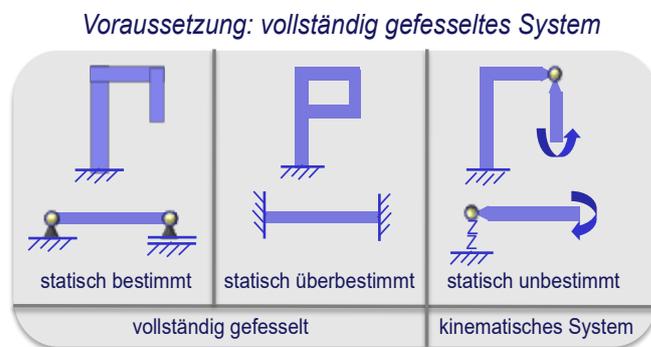


Bild 2.254 Statischer Last-Verformungs-Zusammenhang

Nicht immer sind alle Verformungen gesucht und alle Lasten gegeben. Es gibt statische Problemstellungen, in denen für einen Teil der Koordinaten die Verzerrungen vorgegeben und die entsprechenden Lasten gesucht sind. In diesem Fall hilft die entsprechend Bild 2.255 vorgewommene Sortierung der Gleichungen (und damit der Steifigkeitsmatrix) und der Auflösung nach den unbekannt Verformungen und Lasten in Abhängigkeit von den gegebenen Lasten und Verzerrungen.

Sortieren der Gleichungen:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{x\}_u \\ \{x\}_b \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} \{f\}_b \\ \{f\}_u \end{Bmatrix}$$

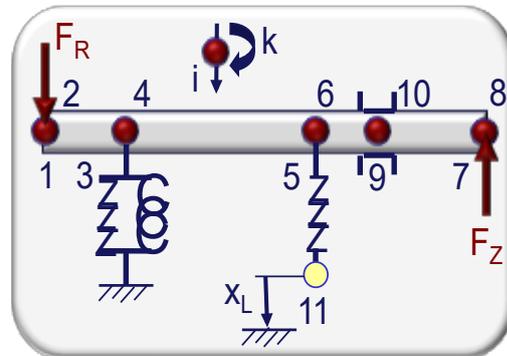
b: bekannt (gegeben), u: unbekannt (gesucht)

$$\begin{Bmatrix} \{f\}_b \\ \{f\}_u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C]_{bu} & [C]_{bb} \\ [C]_{uu} & [C]_{ub} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\}_u \\ \{x\}_b \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{x\}_u &= [C]^{-1}_{bu} \{ \{f\}_b - [C]_{bb} \{x\}_b \} \\ \{f\}_u &= [C]^T_{bb} \{x\}_u + [C]_{ub} \{x\}_b \end{aligned}$$

mit $[C]_{uu} = [C]^T_{bb}$

$$\begin{Bmatrix} \{x\}_u \\ \{f\}_u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C]^{-1}_{bu} & -[C]^{-1}_{bu} [C]_{bb} \\ [C]^T_{bb} [C]^{-1}_{bu} & [C]_{ub} - [C]^T_{bb} [C]^{-1}_{bu} [C]_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{f\}_b \\ \{x\}_b \end{Bmatrix}$$



{f}	1	FR	?	{x}
	2	0	?	
	3	0	?	
	4	0	?	
	5	0	?	
	6	0	?	
	7	-Fz	?	
	8	0	?	
	9	?	0	
	10	?	0	
	11	?	xL	

Bild 2.255 Verformungen und Reaktionslasten für gegebene Belastungen und Verzerrungen

2.2.3.4.6 Thermischer Bereich

Für die Berechnung des Temperaturfeldes an WZM-Strukturen haben sich im Wesentlichen das Knotenpunktverfahren und die Finite Elemente Methode etabliert.

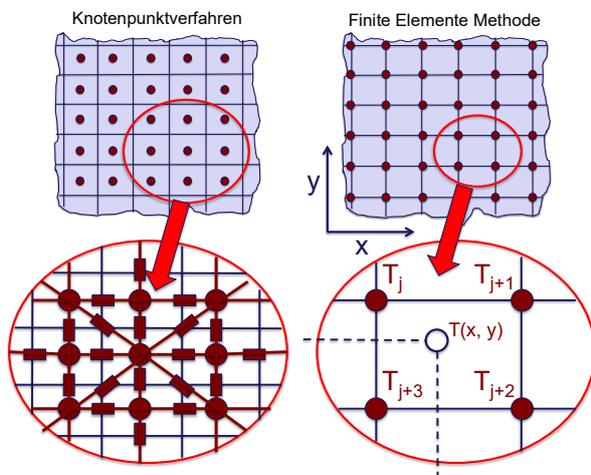
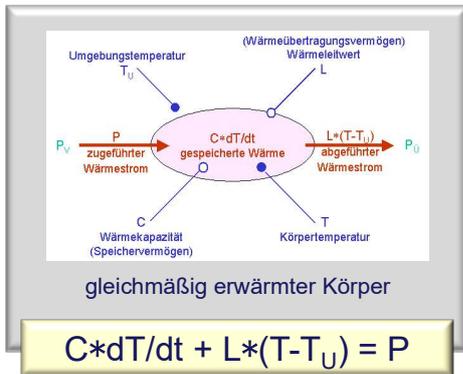


Bild 2.256 Modellierung mit dem Knotenpunktverfahren und der FEM

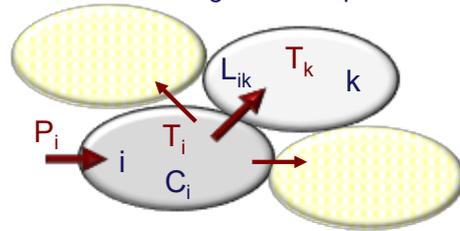
Der Modellierungsunterschied zwischen beiden Verfahren besteht zum Einen in den Konsequenzen des Diskretisierungsnetzes zum Anderen in der Tatsache, dass das Knotenpunktverfahren auf ein Netzwerkmodell mit konzentrierten Parametern führt, während die FEM aus den diskreten Temperaturen in den Knoten die Eigenschaften kontinuierlich über den Elementen approximiert, Bild 2.256.

Knotenpunktverfahren

Wenn man die Differenzialgleichung für den gleichmäßig erwärmten Körper (vgl. Abschnitt 2.1.2.2) als Knotenpunktbeschreibung interpretiert und diese nach der Zeit und nach dem Ort diskretisiert, Bild 2.257, erhält man die Differenzengleichung für die Temperatur über der Zeit. Diese „Herleitung“ ist zwar einfach und anschaulich, verschweigt jedoch die Annahmen und Vereinfachungen. Eine exakte Ableitung der Differenzengleichung aus der Fourierschen Differenzialgleichung für das Wärmeleitproblem findet man z.B. in [9].



Räumliche Diskretisierung in Knotenpunkte : i, k



Knotenpunkt-Gleichung :

$$T_i(t+\Delta t) = T_i(t) + \frac{\Delta t}{C_i} \{ P_i - \sum_k L_{ik} * [T_i(t) - T_k(t)] \}$$

$$T_i(t+\Delta t) = T_i(t) - \frac{\Delta t}{\tau_i} \left[T_i(t) - \frac{P_i + \sum_k L_{ik} * T_k(t)}{\sum_k L_{ik}} \right]$$

$$\tau_i = \frac{C_i}{\sum_k L_{ik}} : \text{Zeitkonstante für Knotenpunkt } i$$

Stabilitätsbedingung für iterative Lösung :
 $\Delta t < \min(\tau_i)$

Zeitliche Diskretisierung: $dt \Rightarrow \Delta t ; dT \Rightarrow \Delta T$

$$C * \Delta T / \Delta t + L * (T - T_U) = P''$$

$$\Delta T = \frac{1}{C} [P - L * (T - T_U)] * \Delta t$$

$$T(t+\Delta t) - T(t) = \frac{1}{C} \{ P - L * [T(t) - T_U(t)] \} * \Delta t$$

Bild 2.257 Differenzengleichung für ein gleichmäßig erwärmtes Körperelement

Die Differenzengleichung ist die Grundlage für die Simulation des instationären thermischen Verhaltens. In [9] werden Fehlereinflüsse, Modellierungsprobleme, Parametrierungshinweise und mehrere Anwendungen des Knotenpunktverfahrens an Werkzeugmaschinen demonstriert. Die Parametrierung der Wärmeleitung in einem diskretisiertem Kontinuum ist in Bild 2.258 gezeigt.

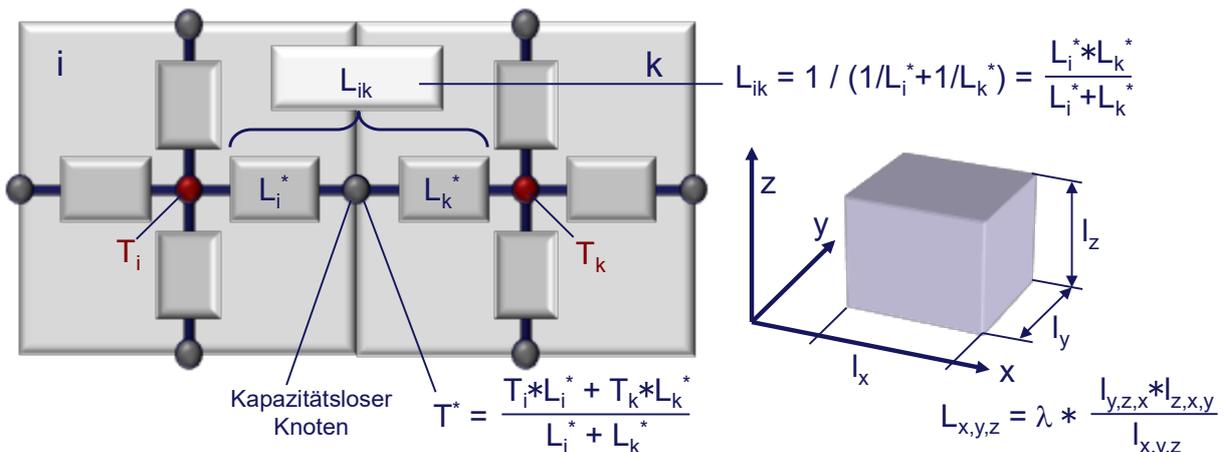
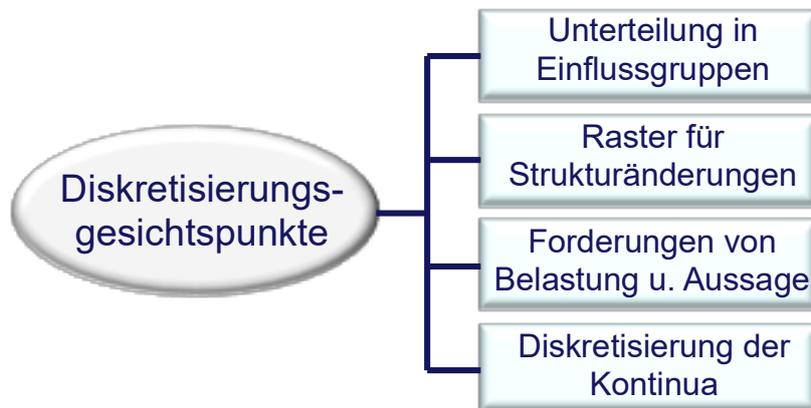


Bild 2.258 Parametrierung der Wärmeleitung im diskretisiertem Kontinuum

Die Diskretisierungsgesichtspunkte gleichen denen der statischen und dynamischen Verhaltensanalyse (vgl. Abschnitt 2.1.2.4.), Bild 2.259.

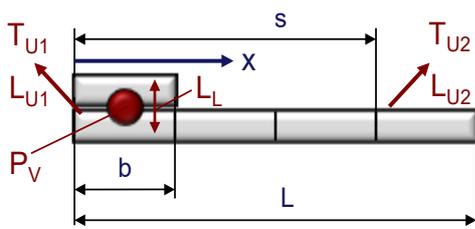


Erklärung der vier aufgeführten Gesichtspunkte:

- *Unterteilung in Einflußgruppen:*
Funktionell und konstruktiv abgrenzbare Einheiten, wie Gestellbauteile, Vorschubachsen, Fluidkreisläufe,...
- *Raster für Strukturänderungen:*
Nachbildung von Bauteilbewegungen erfordert kompatible Rasterung der Bewegungspartner, z.B. Linearführungen
- *Forderungen von Belastung und Aussage:*
Bereiche für die Leistungseinspeisung, Kern-bzw. Oberflächentemperaturen, Temperaturpunkte bzw. Knotenpaare für die Verformungskörper
- *Diskretisierung der Kontinua:*
Genauigkeitserhöhung durch :
 - Senkung des Diskretisierungsfehlers,
 - Verbesserung der Anpassung von Geometrie und Inhomogenitäten.

Bild 2.259 Diskretisierungsgesichtspunkte thermischer Modelle

Ein besonderes Modellierungsproblem stellt die Abbildung der Wärmequellen und -übertragungsverhältnisse bei den bewegten Baugruppen dar. Bild 2.260 beschreibt den Funktionalismus solcher strukturveränderlichen Modelle.



Aufgaben für die Realisierung eines Bewegungspaares:

- Verbindung momentan gegenüberliegender Knoten des Bewegungspaares mit dem Übergangleitwert L_L
- Aufteilung der in der Fuge entstehenden Verlustleistung P_V auf die momentan gegenüberliegenden Knoten des Bewegungspaares
- Verbindung der nicht überdeckten Knoten des längeren Partners mit der Umgebung, wobei noch zwischen der Umgebung vor (T_{U1}) und hinter (T_{U2}) dem kürzeren Partner mit unterschiedlichen Leitwerten L_{U1} und L_{U2} unterschieden werden kann

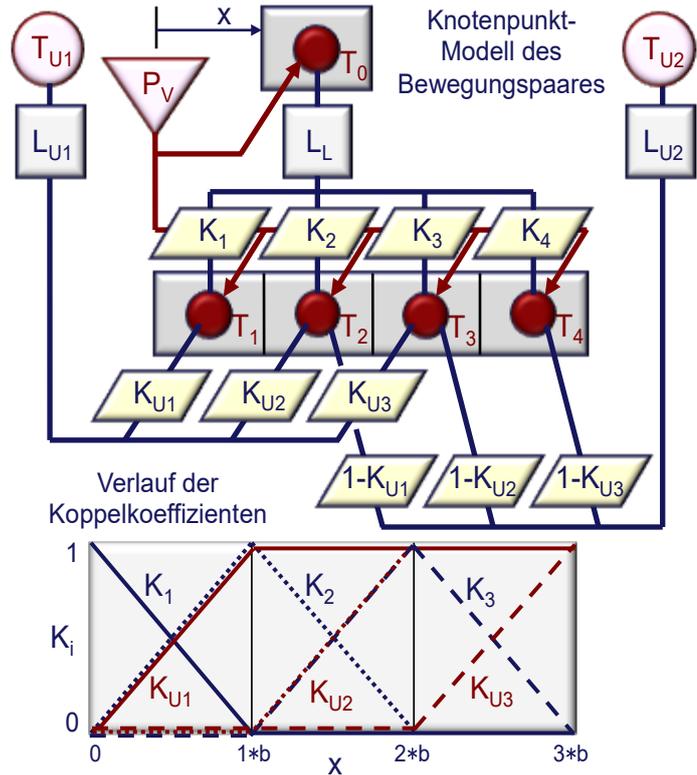


Bild 2.260 Beschreibung positionsabhängiger Strukturkopplung

Dieser Funktionalismus wird insbesondere für die Abbildung der Vorschubachsen benötigt. Zwischen dem bewegten Bauteil (z.B. Schlitten) und der Bewegungsbasis (z.B. Bett) liegt eine mitbewegte Wärmequelle (z.B. bei elektro-mechanischen Antrieben die verspannte Mutter des Kugelgewindetriebs oder bei Lineardirektantrieben der Motor). Die Länge der Bewegungsbasis L und der Verstellweg s sind der Einfachheit halber ein ganzzahlig Vielfaches der Länge des bewegten Bauteils b . Die Wärmeübertragung zwischen den beiden Bauteilen wird mit dem Leitwert L_L und den Koppelkoeffizienten $K_{1...4}$ je nach Position x beschrieben. Vor bzw. hinter der bewegten Baugruppe existieren Wärmeübertragungen zur Umgebung, die mit der Temperatur T_{U1} bzw. T_{U2} , dem Leitwert L_{U1} bzw. L_{U2} und den Koppelkoeffizienten $K_{U1...3}$ positionsabhängig beschrieben werden.

Das folgende Beispiel der thermischen Analyse eines Mehrspindel-Drehautomaten soll die Möglichkeiten des Knotenpunkt-Modells demonstrieren. Bild 2.261 charakterisiert zunächst den 6-Spindel-Drehautomaten als frei konfigurierbares Maschinensystem. Die folgenden vier Darstellungen illustrieren den systematischen Aufbau des Knotenpunkt-Modells über die Teilmodelle der Grundmaschine, Bild 2.262, der konfigurationsabhängigen Baugruppen, Bild 2.263, der Vorschubhydraulik, Bild 2.264 und dem KSS-, Werkstück- und Spänedurchlauf, Bild 2.265.

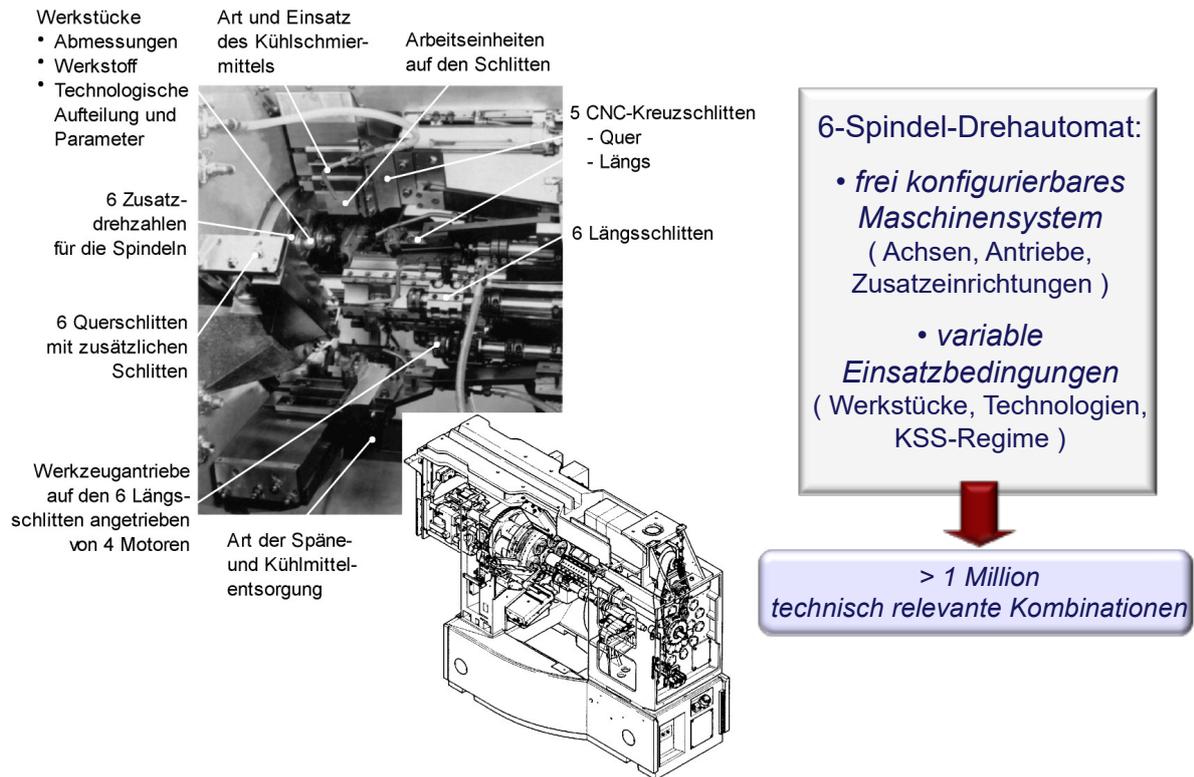


Bild 2.261 Charakteristik des Mehrspindel-Drehautomaten



Diskretisierung für das Knotenpunktmodell:

- nach Verformungsberechnung (Einzelknoten für therm. Dehnung, Knotenpaare für therm. Biegung)
- nach Temperaturberechnung (Knoten für Wärmeaustausch, Knoten zur Leistungseinspeisung)

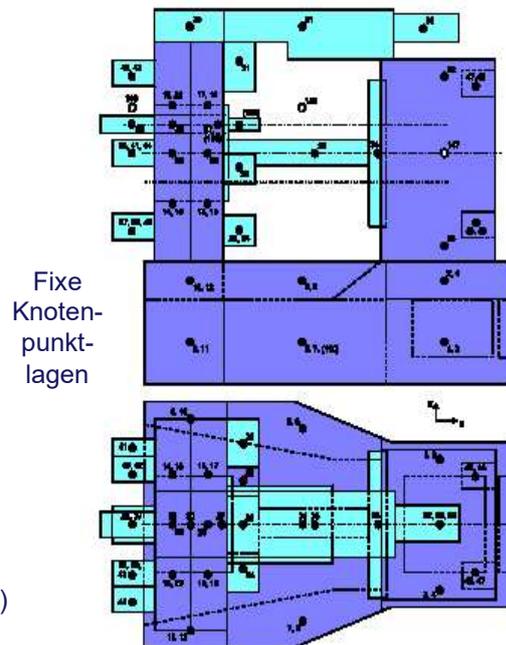


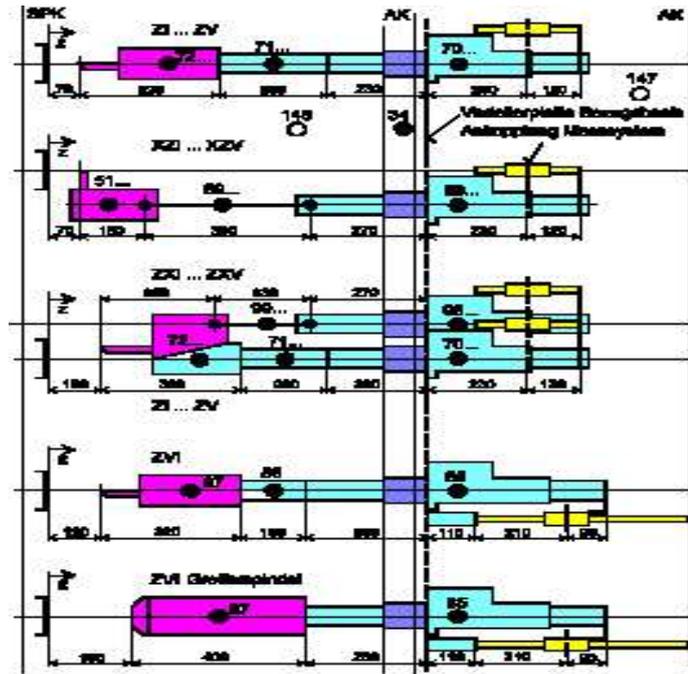
Bild 2.262 Knotenpunkt-Modell der Grundmaschine



Antriebsmodul für die Längsbewegungen

Konfigurationsabhängige Baugruppen:

- Vorschubachsen (Längs- und Querschlitzen)
 - Werkzeugantriebe und Zusatzeinrichtungen
- ⇒ Modellierung als Einzelknoten und Knotenkettens
- ⇒ Aktivierung über Parameter der Konfigurationsdatei



Längsachsen als konfigurationsabhängige Baugruppen

Bild 2.263 Knotenpunkt-Modell der konfigurationsabhängigen Baugruppen

Wärmetransport durch Masseströme:

- Ölströme in der Vorschubhydraulik
 - Wärmeaustausch mit Gestellbauteilen, Achsen, Werkzeugen und Werkstücken
- ⇒ Modellierung als Knotennetzwerk

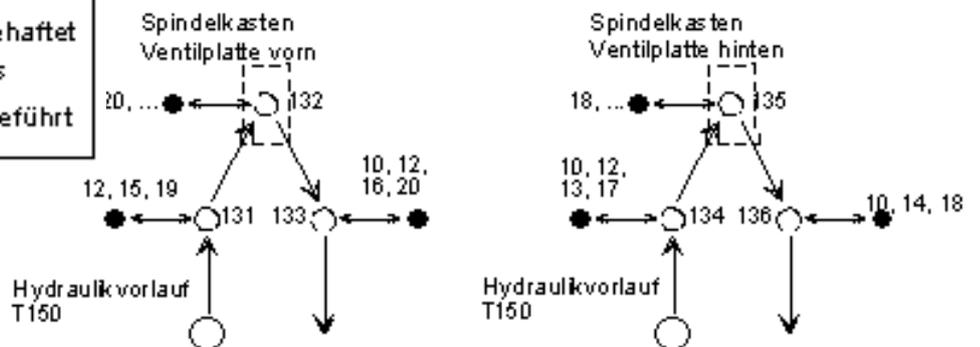
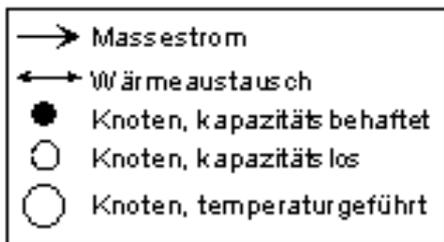
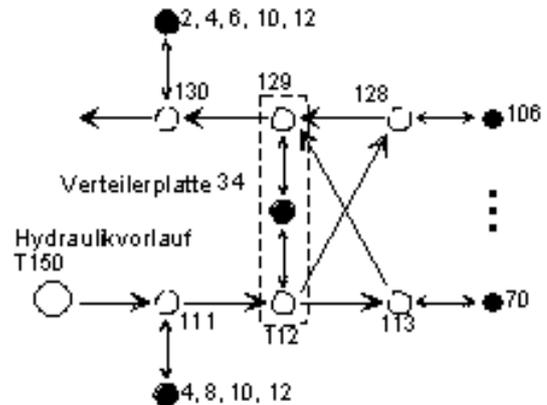


Bild 2.264 Knotenpunkt-Modell der Vorschubhydraulik

KSS-Kreislauf, Werkstück-durchlauf, Späneentsorgung und Umhausung:

- je Spindellage ein gemeinsamer KSS-Späne-Knoten
 - KSS-Strom und Spannungsvolumen, technologieabhängig aufgeteilt
 - Wärmeaustausch mit der Umgebung
- ⇒ Modellierung als Knotennetzwerk

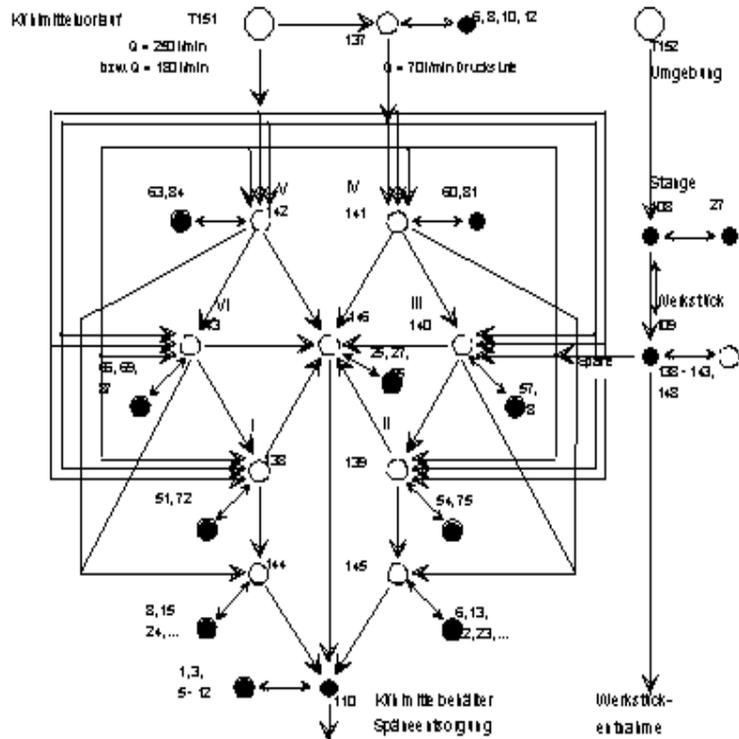
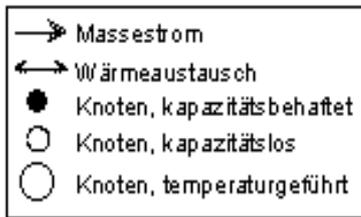
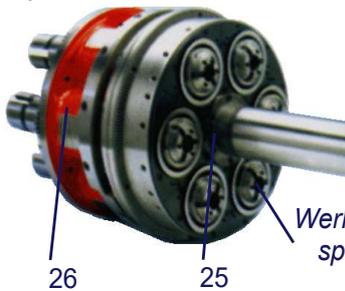


Bild 2.265 Knotenpunkt-Modell von KSS-, Werkstück- und Spänedurchlauf

Bevor das Gesamtmodell des 6-Spindel-Drehautomaten simuliert wird, sollten definierte Teilmodelle unter möglichst idealen Last- und Randbedingungen an entsprechenden *Leerlaufmessungen am Spindel-Einlaufprüfstand*

Spindeltrummel:



mittlere Temperaturen in der vorderen und hinteren Lagerebene an der Spindeltrummel

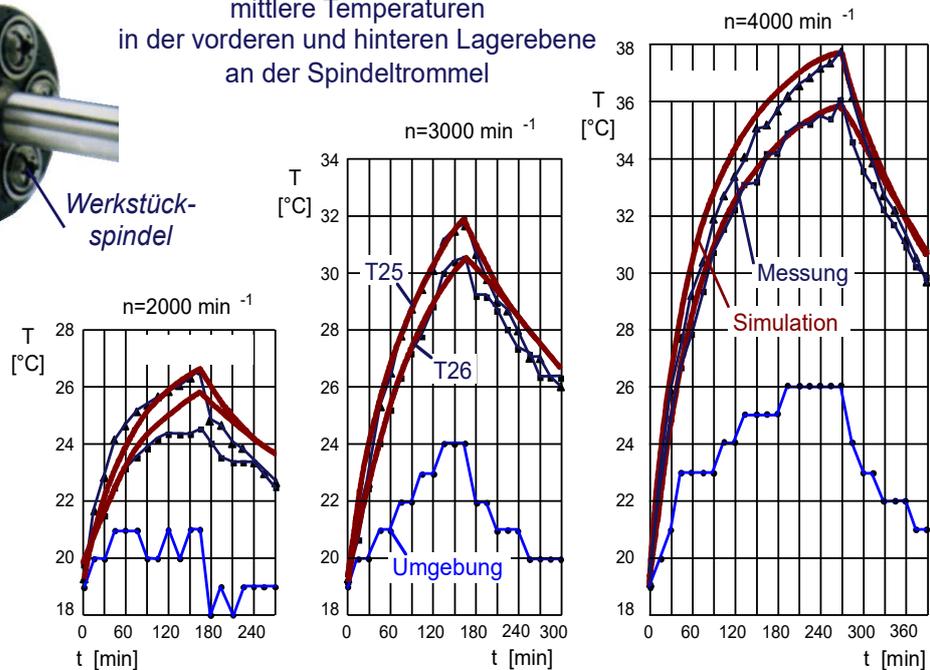
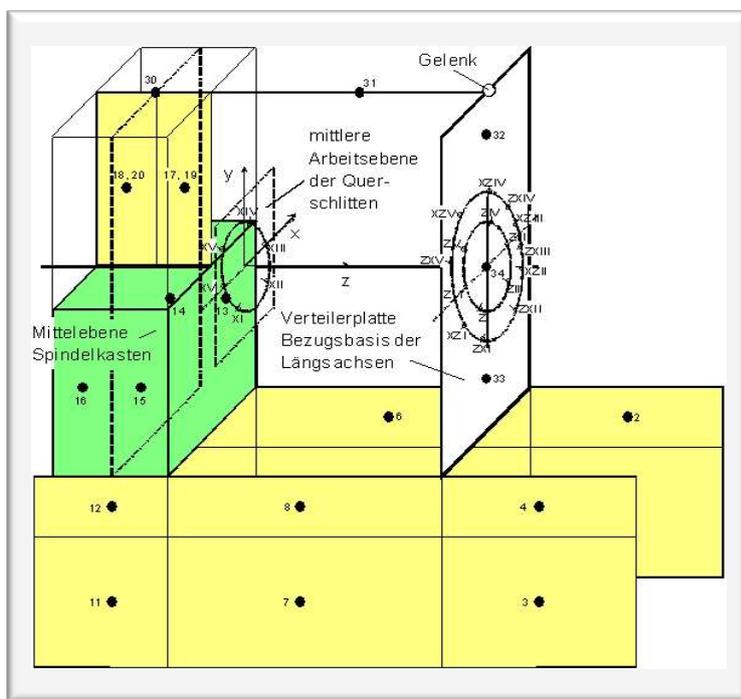


Bild 2.266 Verifikation des Modells durch exemplarische Messungen exemplarischen Messungen verifiziert werden.

Bild 2.266 zeigt die Ergebnisse einer solchen Verifikation und überzeugt von der hohen Qualität des Knotenpunkt-Modells.

Wenn das Knotenpunkt-Modell des Gesamtsystems derart qualifiziert das Temperaturfeld abbildet, braucht es ein adäquates Verformungsmodell, um aus den Temperaturdifferenzen die thermisch bedingten Verformungen an der Wirkstelle zu berechnen. Bild 2.267 stellt das vereinfachte Verformungsmodell des Mehrspindlers dar, welches aus elementaren Verformungskörpern mit Dehnung, Krümmung und Wölbung besteht und so die Verformung direkt und einfach aus den Temperaturen bestimmbar macht.

Ein Beispiel für die thermische Analyse mit dem Knotenpunkt-Modell des Mehrspindlers zeigt Bild 2.268. Die Darstellung stellt das Verlagerungsverhalten von Quer- und Längsschlitten in der Erwärmungs- und Abkühlphase bei zwei verschiedenen Ölvorlauftemperaturen gegenüber.

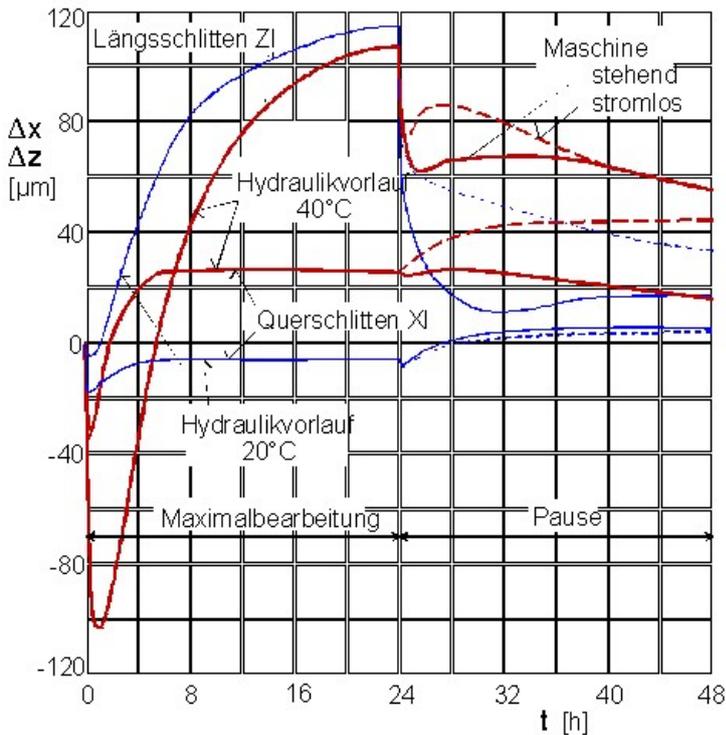


- elementare Verformungskörper
- freie thermische Dehnung, Krümmung und Wölbung
- ⇒ Verlagerungen der Quer- und Längsachs-Basispunkte
- ⇒ Axiale Dehnung der Vorschubachsen

Thermische Verformungskörper

- Dehnung
- Dehnung und Krümmung
- Dehnung und Wölbung

Bild 2.267 Vereinfachtes Verformungsmodell für die Grundmaschine



Beispiel für die thermische Analyse des Verlagerungsverhaltens an Quer- und Längsschlitten:

Aufgabenstellungen der thermischen Analyse:

- Lastfalluntersuchungen
- Einflussanalysen (Baugruppen, Wärmequellen, ...)
- Variantenuntersuchungen

Bild 2.268 Analyse thermisch bedingter Verlagerungen mit dem Knotenpunkt-Modell

Bild 2.269 zeigt am Beispiel der realen (Messung) und virtuellen (Simulation) Fertigung eines konkreten Testwerkstückes die hohe Qualität des Knotenpunkt- und Verformungsmodells. Aufgrund der Echtzeitfähigkeit der Modelle und ihrer relativ leichten Implementierbarkeit auf kommerziellen WZM-Steuerungen, ermöglichen die Modelle eine Korrektur der Werkstückfehler.

Vergleich der simulierten thermisch bedingten Durchmesserabweichungen mit den Ergebnissen der Werkstückvermessung

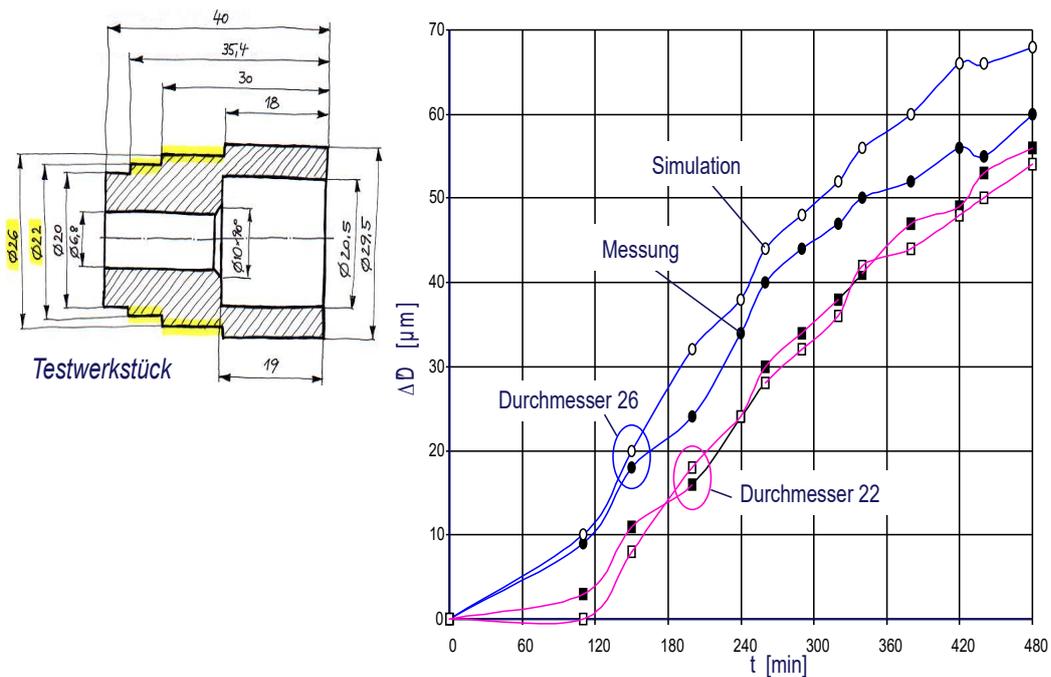


Bild 2.269 Korrektur thermisch bedingter Verlagerungen mit dem Knotenpunkt-Modell

Finite Elemente Methode

Die Berechnung der thermisch bedingten Verformungen mit der Finite Element Methode erfolgt in zwei Schritten, Bild 2.270. Im ersten Schritt wird das Differentialgleichungssystem (DGL-System) der Wärmeströme nach den Temperaturen gelöst. Im zweiten Schritt werden die elastischen Kräfte mit den thermischen Ersatzkräften gleichgesetzt und nach den Verformungen aufgelöst.

Bei WZM existieren praktisch nur Wirkungen der Temperatur auf die Verformung, aber keine Rückwirkungen der Verformung auf die Temperatur. Das heißt, man berechnet mit dem Finite-Element Verfahren die thermo-elastische Verformung rückkopplungsfrei in zwei Schritten:

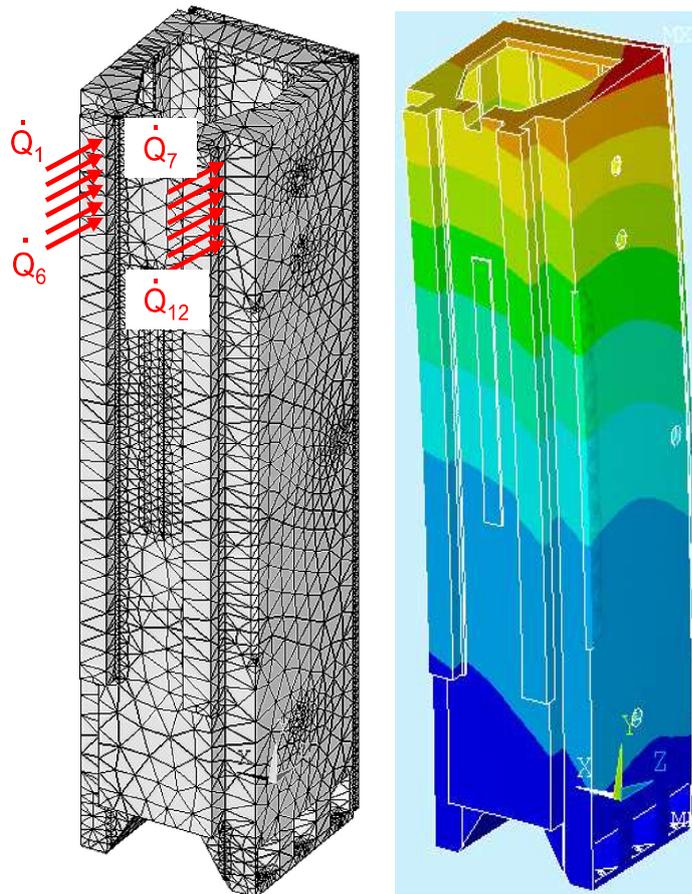
1. Schritt

- Vernetzung mit **thermischen FE-Elementen**
- Parametrierung der Elemente mit thermischen Werkstoffparametern
- Applizieren thermischer Lasten
- Applizieren von konvektiven Randbedingungen u.a.
- Im Hintergrund wird vom FE folgendes DGL-System aufgestellt:

$$[K_T]\{\dot{T}\} + [L_T]\{T\} = \{\dot{Q}(t)\}$$

darin bedeuten:

- $[K_T]$ Matrix der thermischen Kapazitäten [*Watt / K / s*]
- $[L_T]$ Matrix der thermischen Leitwerte [*Watt/K*]
- $\{\dot{Q}(t)\}$ Vektor der thermischen Lasten [*Watt*]
- Dieses DGL-System läßt sich im FE numerisch integrieren, d.h. man simuliert im Zeitbereich und erhält $\{T\} = f(t)$
- Typische Rechenzeit für die Problemstellung des Ständers (ca. 16 000 DoF) ca. 16 Stunden Realzeit mit 5 Stunden Simulationszeit
- Komplexere Strukturen benötigen leicht ein Vielfaches der Rechenzeit, so dass die Rechenzeit die abgebildete Realzeit übersteigt.



geladenes $\{T\}$ Feld
 berechnete Verformung $\{x\}$

Bild 2.270 Temperatur- und Verformungsberechnung in der Finite Element Methode (FEM)

2.Schritt

- Umstellen der Elemente auf **thermo-elastische Elemente**
- Im Hintergrund wird vom FE folgendes lineare Gleichungssystem aufgestellt:

$$[[C]][W_{xT}] \begin{Bmatrix} x \\ T \end{Bmatrix} = 0 \qquad [C]\{x\} = -[W_{xT}]\{T\}$$

darin bedeuten:

- $[C]$ Systemsteifigkeitsmatrix $[N/m]$
- $[W_{xT}]$ Matrix Wärmekraftwirkung $[N/K]$
- Aus dem 1.Schritt werden zu ausgewählten Zeitpunkten Temperaturvektoren im FE geladen und es wird ein „Thermischer Ersatzvektor“ $-[K_{xT}]\{T\}$ als Last generiert
- Formal wird die Verformung im FE bestimmt mit:

$$\{x\} = -[C]^{-1}[W_{xT}]\{T\}$$

- Das ist eine ganz normale statische Problemstellung

2.2.3.4.7 Frequenzbereich

Im Frequenzbereich lassen sich insbesondere die dynamischen Eigenschaften linearer Systeme darstellen. Weitestgehend sind WZM-Gestellstrukturen als lineare Systeme beschreibbar.

Schwinger mit Freiheitsgrad 1 (SDoF)

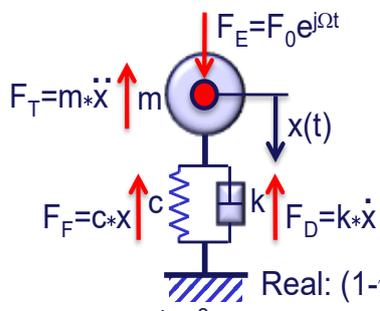


Bild 2.271 Erzwungene Schwingungen

Für den Schwinger mit dem Freiheitsgrad 1 (SDoF = Single Degree of Freedom) nach Bild 2.271 werden nachfolgend ausgehend vom Gleichgewicht der Trägheits-, Dämpfungs- und Federkräfte mit der Erregungskraft über den komplexen Verformungsansatz, die Lösungen als Amplituden- und Phasen- bzw. als Real- und Imaginärteilverformungsgänge dargestellt.

Die Gleichgewichtsbedingung

$$F_T + F_D + F_F = F_E = m * \ddot{x} + k * \dot{x} + c * x$$

Mit dem harmonischen Ansatz folgt

$$x(j\Omega) = (R + jI)e^{i\Omega t}, \quad \dot{x}(t) = j\Omega x \quad \ddot{x}(t) = -\Omega^2 x$$

$$k/m = 2\delta, \quad c/m = \omega_0^2, \quad D = \delta/\omega_0, \quad \eta = \Omega/\omega_0$$

$$(-\Omega^2 + 2\delta j\Omega + \omega_0^2)(R + jI) = F_0/m$$

$$(-\eta^2 + 2Dj\eta + 1)(R + jI) = F_0/c \quad F_0/c = X_{st}$$

Trennung in Realteil und Imaginärteil:

$$\text{Realteil:} \quad (1 - \eta^2)R - 2D\eta I = F_0/c$$

$$\text{Imaginärteil:} \quad 2D\eta R + (1 - \eta^2)I = 0$$

Damit folgen aus den oben stehenden Gleichungen:

$$R = \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} X_{st} \quad I = \frac{-2D\eta}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} X_{st} \quad (2.79)$$

$$|x| = \frac{X_{st}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{1 - \eta^2}{2D\eta} \quad (2.80)$$

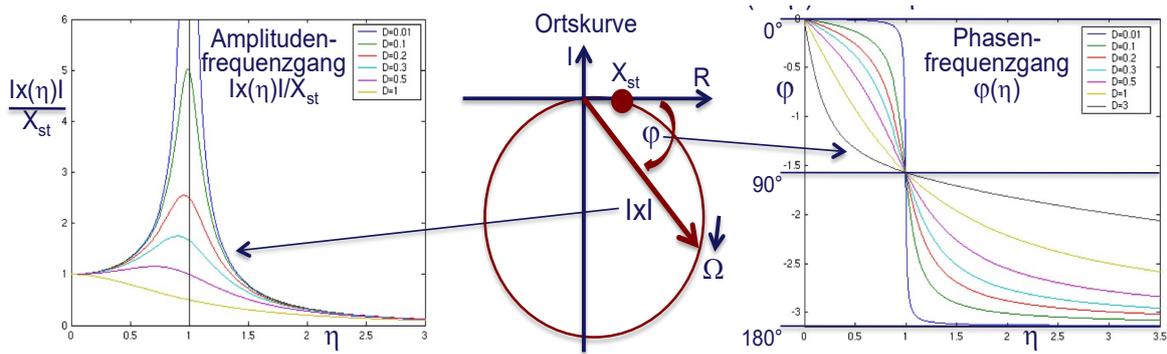


Bild 2.272 Vergrößerungsfunktion für Schwinger nach Bild 2.271

Für die harmonischen Erregungsarten der Federkraft-, Fußpunkt- und Unwuchterregung sind im Bild 2.273 die Vergrößerungsfunktionen dargestellt. Die Vergrößerungsfunktion ist als Verhältnis von Betrag der dynamischen Auslenkung (Amplitude) zur statischen Auslenkung ($\Omega = 0$) $V = |X|/X_{st}$ definiert. Sie wird in Abhängigkeit vom Verhältnis der Erreger- zur Eigenfrequenz $\eta = \Omega/\omega_0$ für unterschiedliche Dämpfungsmaße D dargestellt.

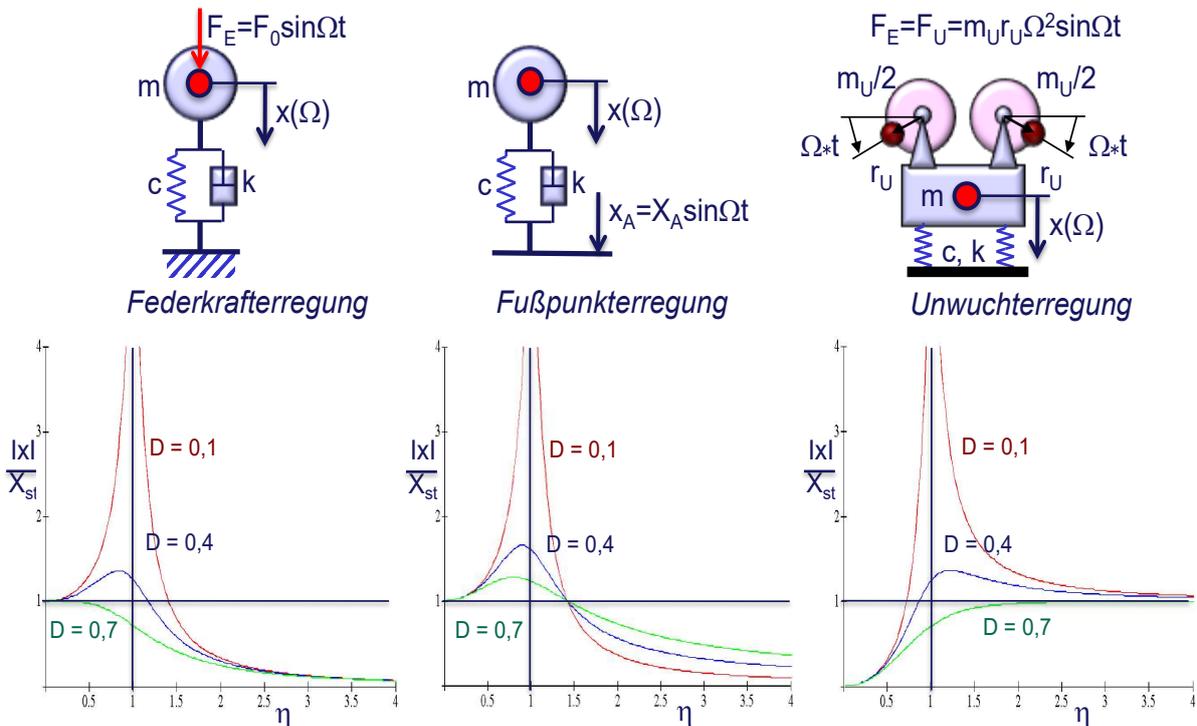


Bild 2.273 Erregungsarten und Vergrößerungsfunktionen

Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden (MDoF)

Für Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden (MDoF = Multi Degree of Freedom) wird die eine DGL des SDoF-Schwingers zum DGL-System der Dimension der Freiheitsgrade. Mit größerem Freiheitsgrad gestaltet sich die Lösung des Systems von Einzelgleichungen unübersichtlich. Mit der Matrixschreibweise ist eine kompakte Darstellung möglich.

Bild 2.274 demonstriert am Beispiel einer Schwingerkette mit dem Freiheitsgrad 2 den Übergang zur Matrixschreibweise.

Das DGL-System in Matrixschreibweise ist die allgemeine Beschreibung eines linearen mechanischen Schwingungssystems mit geschwindigkeitsproportionaler (viskoser) Dämpfung. Für den Erregungsvektor $\{f\} = 0$ erhält man das gedämpfte (komplexe) Eigenwertproblem und Ergebnisse für die freien Schwingungen (Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen). Für $\{f\} \neq 0$ sind die Ergebnisse für erzwungene Schwingungen berechenbar (Amplituden- und Phasenfrequenzgänge), Bild 2.274 und Bild 2.275.

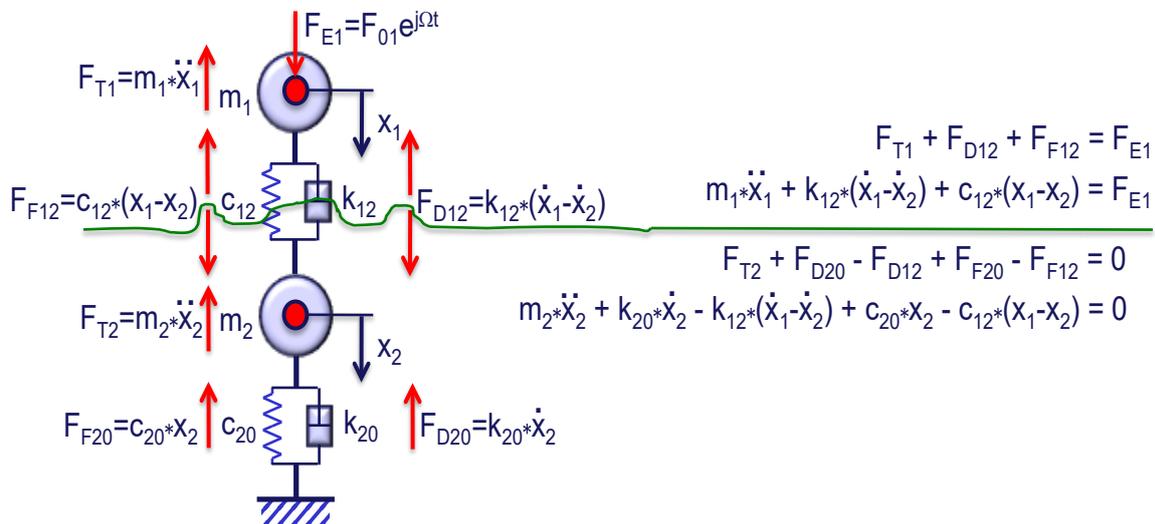


Bild 2.274 Beispiel für die Matrixschreibweise

Das DGL-System in Matrixschreibweise nach Bild 2.274 hat die folgende Form:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{20} + k_{12} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{20} + c_{12} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{E1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

bzw. in der Kurzform:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{\dot{x}\} + [C]\{x\} = \{f\} \quad (2.81)$$

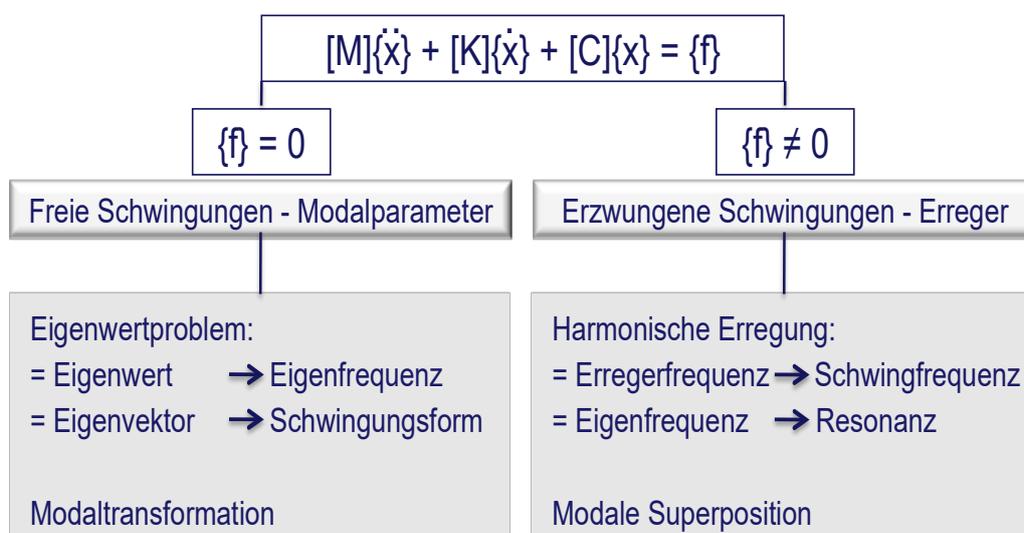


Bild 2.275 Freie und erzwungene Schwingungen

Eigenfrequenzen und Schwingungsformen

Eigenfrequenzen und Schwingungsformen sind Charakteristika der elastisch-trägen, mechanischen Struktur und unabhängig von einer äußeren Erregung. Für die Berechnung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen sogenannter *freie Schwingungen* kann die Dämpfung oft vernachlässigt werden. Man kommt so vom komplexen zum reellen Eigenwertproblem, Bild 2.276.



$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{x\} = \{0\}$$

$$x_i(\omega_l) = X_{il} e^{j\omega_l t}, \quad \{\ddot{x}\}(\omega_l) = -\omega_l^2 \{X\}_l e^{j\omega_l t}$$

$$(-\omega_l^2 [M] + [C]) \{X\}_l = \{0\}$$

l : Eigenwertordnung (*modale Ordnung*)

ω_l : Eigen(*kreis*)frequenz

λ_l : Eigenwert

$\{X\}_l$: Eigenvektor, Schwingungsform (*Mode*)

Allgemeine Formulierung
des reellen Eigenwertproblems: $([A] - \lambda_l [E]) \{X\}_l = \{0\}$

$$[A] = [M]^{-1}[C], \quad \lambda_l = \omega_l^2$$

vorteilhaft für Modelle mit ausschließlich
konzentrierter Trägheitsbeschreibung:

$$[M] = \text{Diag}(m_i), \quad [M]^{-1} = \text{Diag}(1/m_i)$$

$$[A] = [C]^{-1}[M], \quad \lambda_l = 1/\omega_l^2$$

vorteilhaft bei vorangegangener statischer Analyse:
 $[C]^{-1}$ liegt bereits vor.

unmöglich für freie (ungefesselte) Systeme:
 $[C]^{-1}$ nicht existent!

Bild 2.276 Formulierung des reellen Eigenwertproblems

Die Lösungen des Eigenwertproblems – Eigenwerte und Eigenvektoren – entsprechen den Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen. Die Eigenfrequenzen markieren die Frequenzbereiche in deren Nähe die Erregerfrequenz das System in Resonanz bringen kann. Ob die einzelnen Resonanzen zu gefährlichen Amplitudenüberhöhungen führen, hängt von den zugeordneten Schwingungsformen und Dämpfungen sowie von Angriffsort und Richtung der Erregung ab, Bild 2.278.

Bild 2.279 zeigt Eigenschwingungsformen mit den typischen Knoten und Bäuchen am Balken. An einem fremderregten System treten praktisch keine reinen Eigenschwingungs- sondern Betriebsschwingungsformen auf, Bild 2.277 sowie die Gleichungen (2.82) und (2.83).

Eigenschaften von Eigenvektoren und Schwingungsformen sind nachfolgend beschrieben:

- Eigenvektoren sind einfach unbestimmt (bis auf einen unbekanntem Faktor),
- Eigenvektorensin beliebig skalierbar,
- Es sind nur Aussagen zu Amplitudenverhältnissen möglich, nicht zu Absolutwerten,
- Der Vergleich verschiedener Schwingungsformen ist nur bei gleichartiger Normierung möglich.

Eigenvektoren können z.B. nach den zwei unten beschriebenen Verfahren normiert werden.

Maximum-Normierung:

$$X_{kl} = \text{Max}_{i=1}^n (|X_{il}|) \quad (2.82)$$

$$\bar{X}_{il} = X_{il}/X_{kl} \quad i = 1, \dots, n \quad \bar{X}_{kl} = 1$$

Betrags-Normierung:

$$|X_l| = \sqrt{\sum_{i=1}^n X_{il}^2} \quad (2.83)$$

$$\bar{X}_{il} = X_{il}/|X_l| \quad i = 1, \dots, n$$

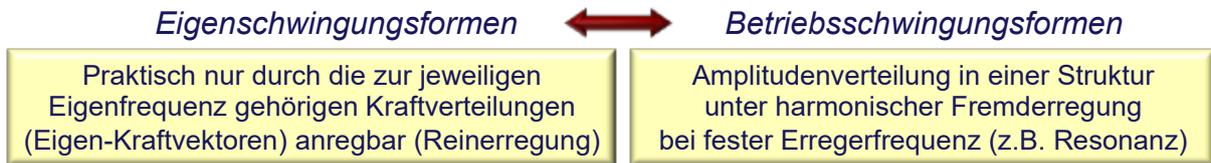
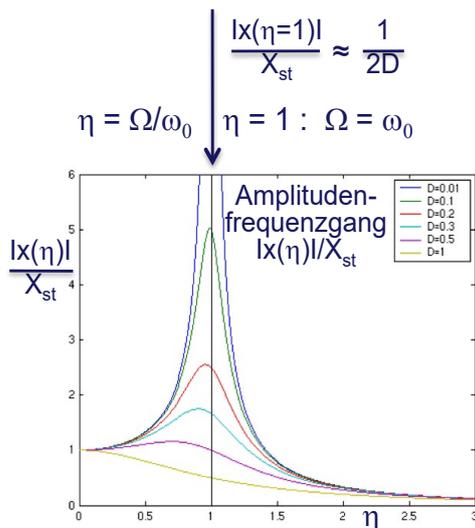


Bild 2.277 Eigenvektoren und Schwingungsformen

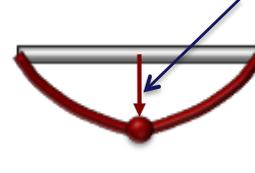
In Bild 2.280 sind schematisch die Begriffe Struktur, Schwingungsform, Eigen- und Erregerfrequenz, Frequenzgang und Resonanz erklärt und in Zusammenhang gebracht.

Wenn die Erregerfrequenz in der Nähe einer Eigenfrequenz liegt, kann es zur Amplitudenvergrößerung kommen, die im Resonanzfall ($\Omega \approx \omega_0$ für $D \ll 1$) ihr Maximum erreicht.

Ob die Resonanz für das interessierende Verlagerungsverhalten (z.B. am TCP) kritisch ist, ist abhängig von der zugehörigen Schwingungsform und Dämpfung sowie der Erregung (Ort, Richtung, Energie).



Resonanzamplitude $X(\Omega=\omega_0)=X_{max}$



Resonanzamplitude $X(\Omega=\omega_0) \approx 0$

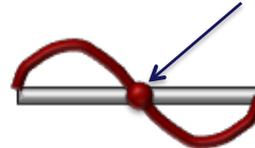


Bild 2.278 Interpretation der Eigenwerte

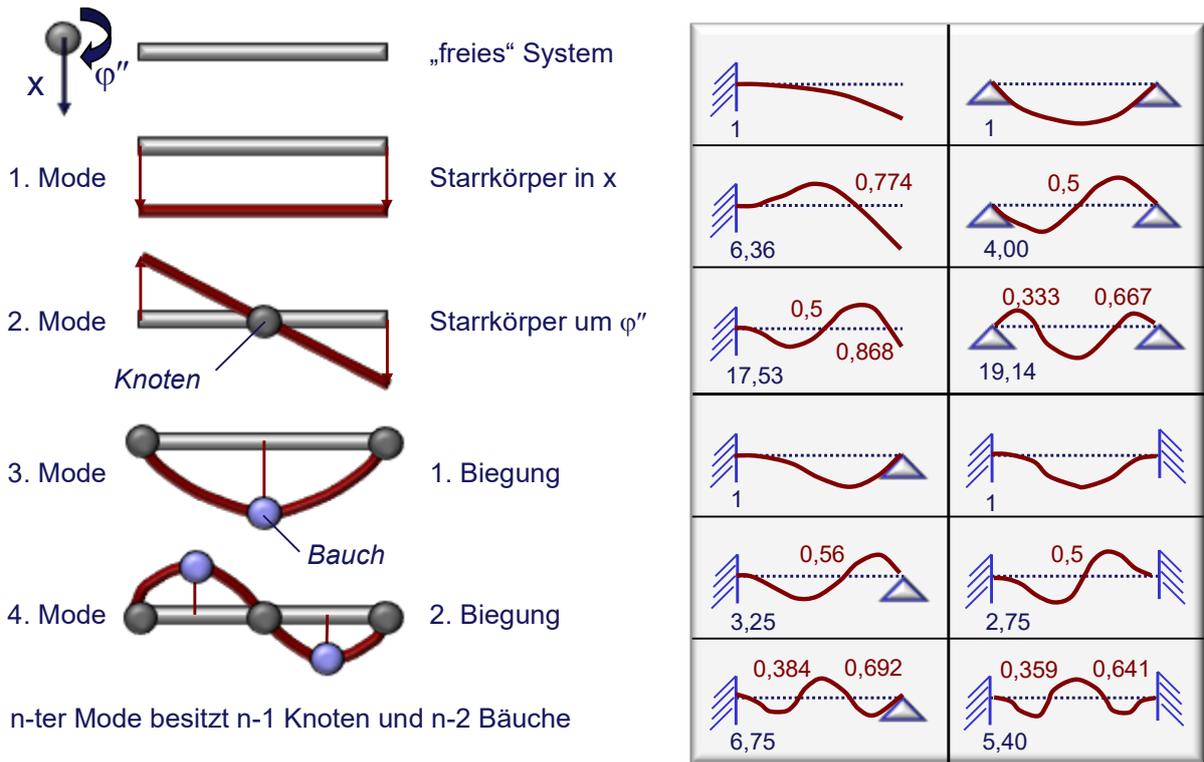


Bild 2.279 Charakteristik der Eigenschwingungsformen am Balken

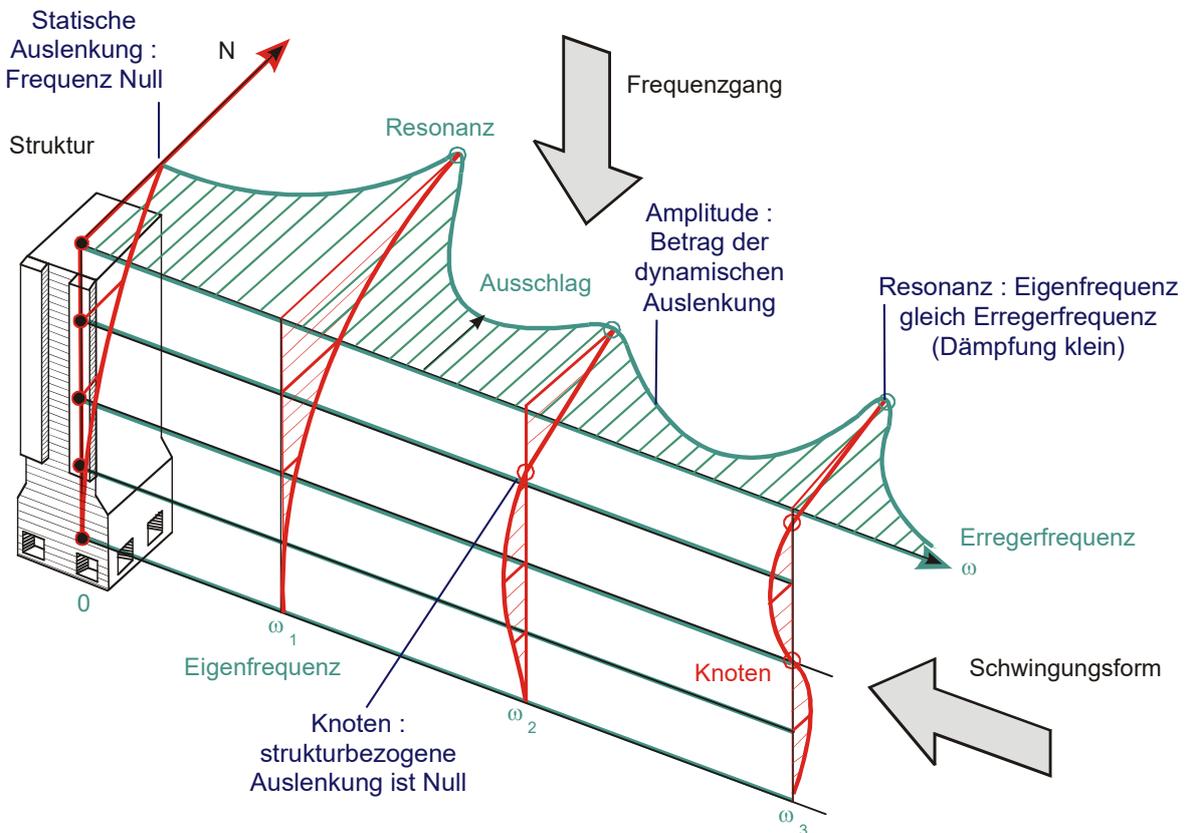


Bild 2.280 Veranschaulichung von Struktur, Schwingungsform und Frequenzgang

Frequenzgang

Mit der sogenannten Modaltransformation gelingt die Entkopplung des n -dimensionalen DGL-Systems (n - Anzahl der Freiheitsgrade des Modells) in m Einzelgleichungen (m - Anzahl der berücksichtigten Moden). Mit den Ergebnissen des ungedämpften Eigenwertproblems lässt sich nur unter bestimmten Annahmen zum Aufbau der Dämpfungsmatrix das DGL-System entkoppeln.

Die Entkopplung des Differentialgleichungssystems nach Gleichung (2.81) wird nachfolgend abgeleitet. Das vollständige DGL-System mit Erregungs- und Dämpfungskräften lautet

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{\dot{x}\} + [C]\{x\} = \{f\}.$$

Die physikalischen Koordinaten $\{x\}$ können in Modalkoordinaten $\{q\}$ transformiert werden zu :

$$\{x\} = [X]\{q\}$$

mit der Modalmatrix $[X] = [\{X\}_1, \dots, \{X\}_m]$, wobei $\{X\}_l$ für $l = 1, \dots, m$ die Matrix der Eigenvektoren bedeutet.

Unter bestimmten Annahmen zum Aufbau der Dämpfungsmatrix $[K]$ erfolgt eine vollständige Entkopplung des DGL-Systems in m Einzelgleichungen:

$$\mu_l * \ddot{q}_l + \kappa_l * \dot{q}_l + \gamma_l * q_l = h_l \quad (2.84)$$

Dabei sind μ_l, κ_l und γ_l die modalen Parameter:

$Diag(\mu_l) = [X]^T [M] [X]$: modale Trägheit

$Diag(\kappa_l) = [X]^T [K] [X]$: modale Dämpfung

$Diag(\gamma_l) = [X]^T [C] [X]$: modale Steife und

h_l die modalen Erregergrößen: $\{h\} = [X]^T \{f\}$.

Für harmonische Erregung gilt:

$$\{f\} = \{F\}e^{j\Omega t} \text{ und } \{h\} = \{H\}e^{j\Omega t} \text{ mit } \{H\} = [X]^T \{F\}.$$

Es gilt zwischen den Modalparametern (analog zum „Einmassenschwinger“):

$$\kappa_l / \mu_l = 2\delta_l, \quad \gamma_l / \mu_l = \omega_l^2; \quad D_l = \delta_l / \omega_l$$

$$\text{mit } \kappa_l = 2D_l * \mu_l * \omega_l = 2D_l * \mu_l / \omega_l$$

Für harmonische Erregung werden die Einzelgleichungen mit einem entsprechenden Ansatz nach den komplexen Modalkoordinaten gelöst, wie nachfolgend gezeigt ist.

Die Lösungen re_l und im_l für $l = 1, \dots, m$ für die Modalkoordinaten müssen nun in die physikalischen Koordinaten Re_l und Im_l folgendermaßen zurücktransformiert werden:

Für harmonische Erregung $\{h\} = \{H\}e^{j\Omega t}$ und den eingeschwungenen Zustand bei der Erregerfrequenz Ω gilt (Partikuläransatz):

$$q_l(j\Omega) = Q_l e^{j(\Omega t + \varphi_l)} = (re_l + j * im_l) e^{j\Omega t}$$

und entsprechend $\dot{q}_l = j\Omega q_l$ sowie $\ddot{q}_l = -\Omega^2 q_l$. Damit wird aus Gleichung (2.84)

$$(-\Omega^2 \mu_l + j\Omega \kappa_l + \gamma_l)(re_l + j * im_l) = H_l.$$

Nach Division durch μ_l und Verwendung von $\kappa_l/\mu_l = 2\delta_l$; $\gamma_l/\mu_l = \omega_l^2$; $\delta_l/\omega_l = D_l$

Sowie der Abstimmung $\nu_l = \Omega/\omega_l$ und Trennung in Realteil- und Imaginärteil-Beziehungen folgen

$$-\nu_l^2 * re_l - \nu_l * 2D_l * im_l + re_l = H_l/\gamma_l \quad : \text{Realteil}$$

$$-\nu_l^2 * im_l + \nu_l * 2D_l * re_l + im_l = 0 \quad : \text{Imaginärteil}$$

Die Auflösung nach re_l und im_l ergibt dann für die modale Koordinate q_l :

$$\begin{aligned} re_l &= \frac{1 - \nu_l^2}{(1 - \nu^2)^2 + 4\nu_l^2 D_l^2} * \frac{H_l}{\gamma_l} \\ im_l &= \frac{-2\nu_l D_l}{(1 - \nu^2)^2 + 4\nu_l^2 D_l^2} * \frac{H_l}{\gamma_l} \end{aligned} \quad (2.85)$$

Die Rücktransformation der Modalkoordinaten $\{q\}$ in die physikalischen Koordinaten $\{x\}$ gestaltet sich anschaulich als Überlagerung von m „Einmassenschwingern“, wie in Bild 2.281 gezeigt ist.

Wegen $\{x\} = [X]\{q\}$ für die komplexen Anteile

$$\{Re(\Omega)\} = [X]\{re(\Omega)\} \text{ und } \{Im(\Omega)\} = [X]\{im(\Omega)\}$$

sowie durch Einsetzen von $[X]^T\{F\}$ für $\{H\}$ kann die Rücktransformation vorgenommen werden.

Am Beispiel des Realteiles für die Koordinate i ($Re_i(\Omega)$) sei das Vorgehen gezeigt.

$$\text{Aus } \{Re(\Omega)\} = [X]\{re(\Omega)\} \text{ folgt } Re_i(\Omega) = \sum_{l=1}^m X_{il} * re_l(\Omega)$$

$$\text{Aus } \{H\} = [X]^T\{F\} \text{ folgt } H_l = \sum_{j=1}^n X_{jl} * F_j;$$

$$\text{d.h. für } F_j = \begin{cases} F_k & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j = lk \end{cases} \text{ wird } H_l = X_{kl} * F_k$$

$$\text{Mit } re_l = \frac{1 - \nu_l^2}{(1 - \nu^2)^2 + 4\nu_l^2 D_l^2} * \frac{H_l}{\gamma_l} \quad \text{ergibt sich}$$

$$Re_i(\Omega) = \sum_{l=1}^m X_{il} * \frac{1 - \nu_l^2}{(1 - \nu^2)^2 + 4\nu_l^2 D_l^2} * \frac{X_{kl} * F_k}{\gamma_l}.$$

Entsprechendes Vorgehen für die Imaginärteile und Bezug auf die Erregung liefern dann die komplexe dynamische Nachgiebigkeit zu

$$N_{ik}(\Omega) = Re_i(\Omega)/F_k + j * Im_i(\Omega)/F_k \quad (2.86)$$

mit

$$Re_i(\Omega)/F_k = \sum_{l=1}^m \frac{X_{kl} * X_{il}}{\gamma_l} * \frac{1 - v_l^2}{(1 - v^2)^2 + 4v_l^2 D_l^2}$$

und

$$Im_i(\Omega)/K_k = \sum_{l=1}^m \frac{X_{kl} * X_{il}}{\gamma_l} * \frac{-2v_l D_l}{(1 - v^2)^2 + 4v_l^2 D_l^2}$$

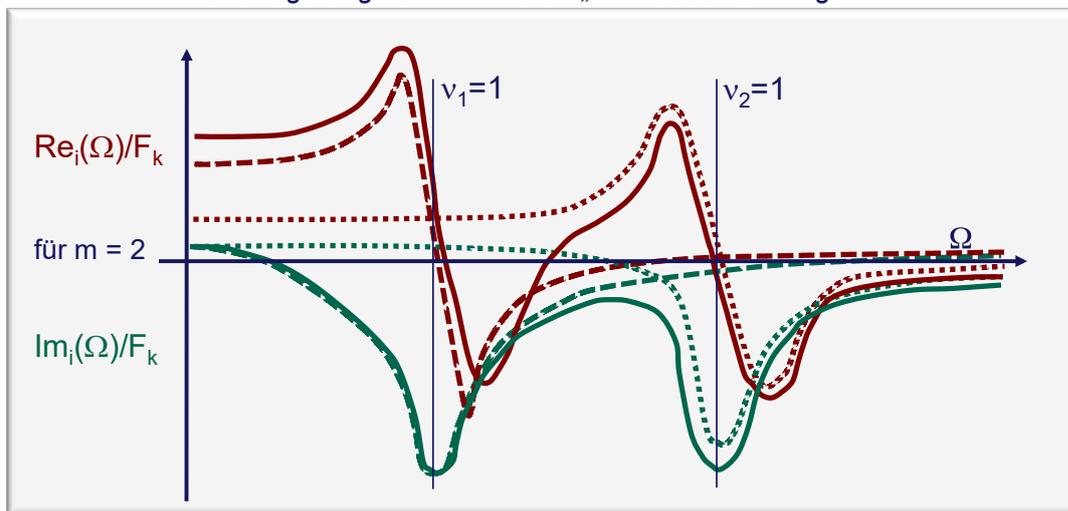
Mit $R(N_{ik}(\Omega)) = Re_i(\Omega)/F_k$ und $I(N_{ik}(\Omega)) = Im_i(\Omega)/F_k$ erhält man für

$$\text{den Betrag: } A(N_{ik}(\Omega)) = \sqrt{R(N_{ik}(\Omega))^2 + I(N_{ik}(\Omega))^2}$$

$$\text{die Phase: } \varphi(N_{ik}(\Omega)) = -\tan^{-1}(R(N_{ik}(\Omega))/I(N_{ik}(\Omega))).$$

In Bild 2.282 sind die drei möglichen Darstellungsformen des Frequenzganges – als Real- und Imaginärteilverfrequenzgang, als Amplituden- und Phasenfrequenzgang oder als Ortskurve – veranschaulicht.

Überlagerung von m modalen „Einmassenschwingern“:



$$Re_i(\Omega)/F_k = \sum_{l=1}^m \frac{X_{kl} * X_{il}}{\gamma_l} * \frac{1 - v_l^2}{(1 - v^2)^2 + 4v_l^2 D_l^2}$$

$$Im_i(\Omega)/K_k = \sum_{l=1}^m \frac{X_{kl} * X_{il}}{\gamma_l} * \frac{-2v_l D_l}{(1 - v^2)^2 + 4v_l^2 D_l^2}$$

Bild 2.281 Veranschaulichung der modalen Superposition

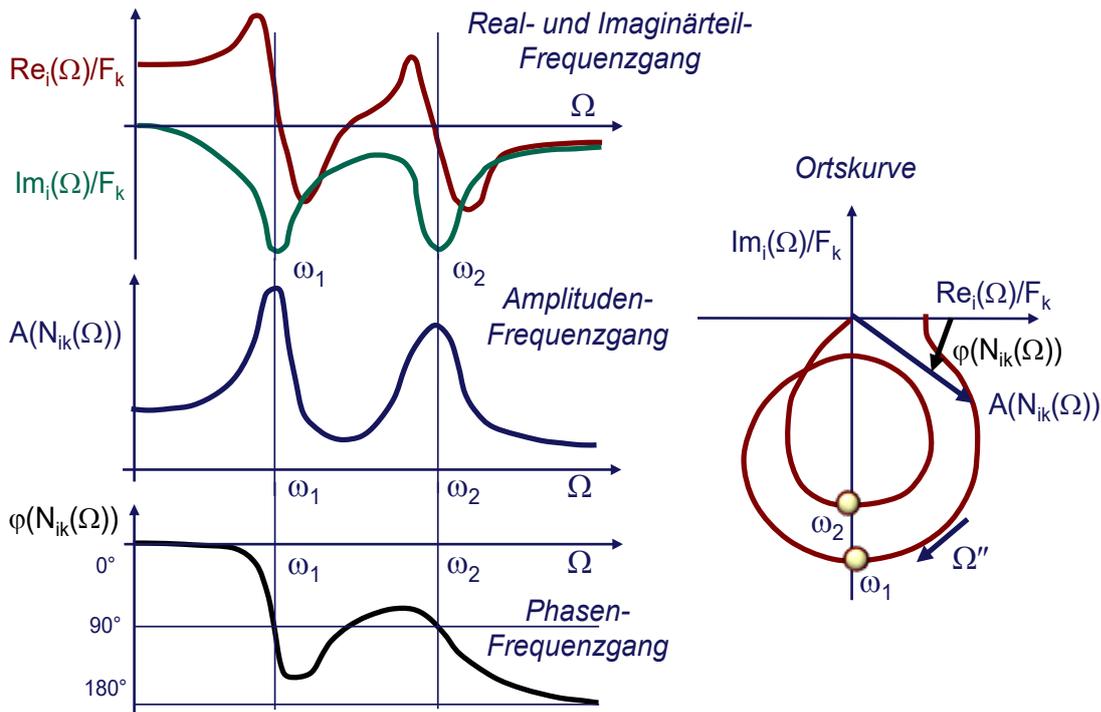


Bild 2.282 Darstellungsformen des Nachgiebigkeitsfrequenzganges

In Bild 2.283 werden am Beispiel $m = 2$ typische Eigenschaften des Nachgiebigkeitsfrequenzganges demonstriert.

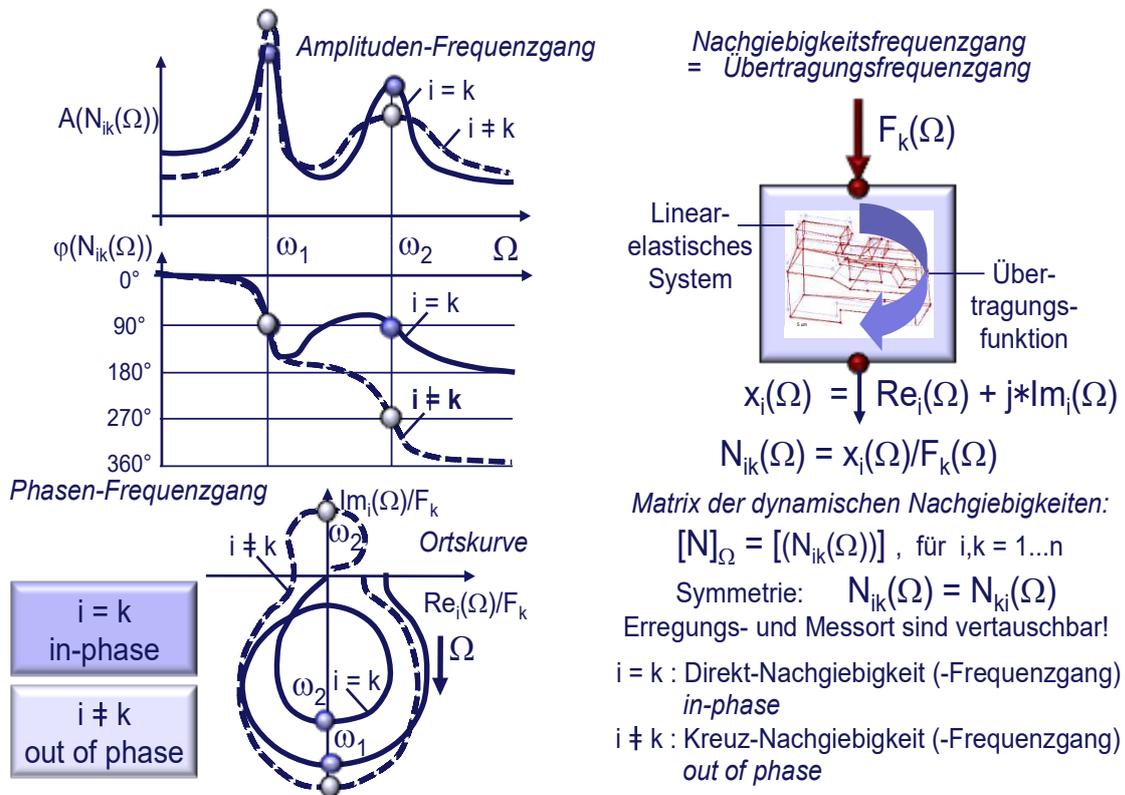


Bild 2.283 Eigenschaften des Nachgiebigkeitsfrequenzganges

2.2.3.4.8 Dämpfungsproblem

$[M]$ und $[C]$ können weitestgehend aus den Geometrie- und Materialangaben bestimmt werden. Für die Dämpfungsparameter existieren vergleichbare Elementarzusammenhänge nicht!

Zunächst gibt Bild 2.284 eine Übersicht, wo an Werkzeugmaschinen Dämpfung, d.h. Energiedissipation auftritt.

Von Bild 2.285 bis Bild 2.291 werden schrittweise und systematisch eine Klassifizierung der Dämpfung nach Beschreibungssicht (Modell) aufgebaut und in dem Zusammenhang die dazu nötigen Annahmen und Voraussetzungen offengelegt [13].

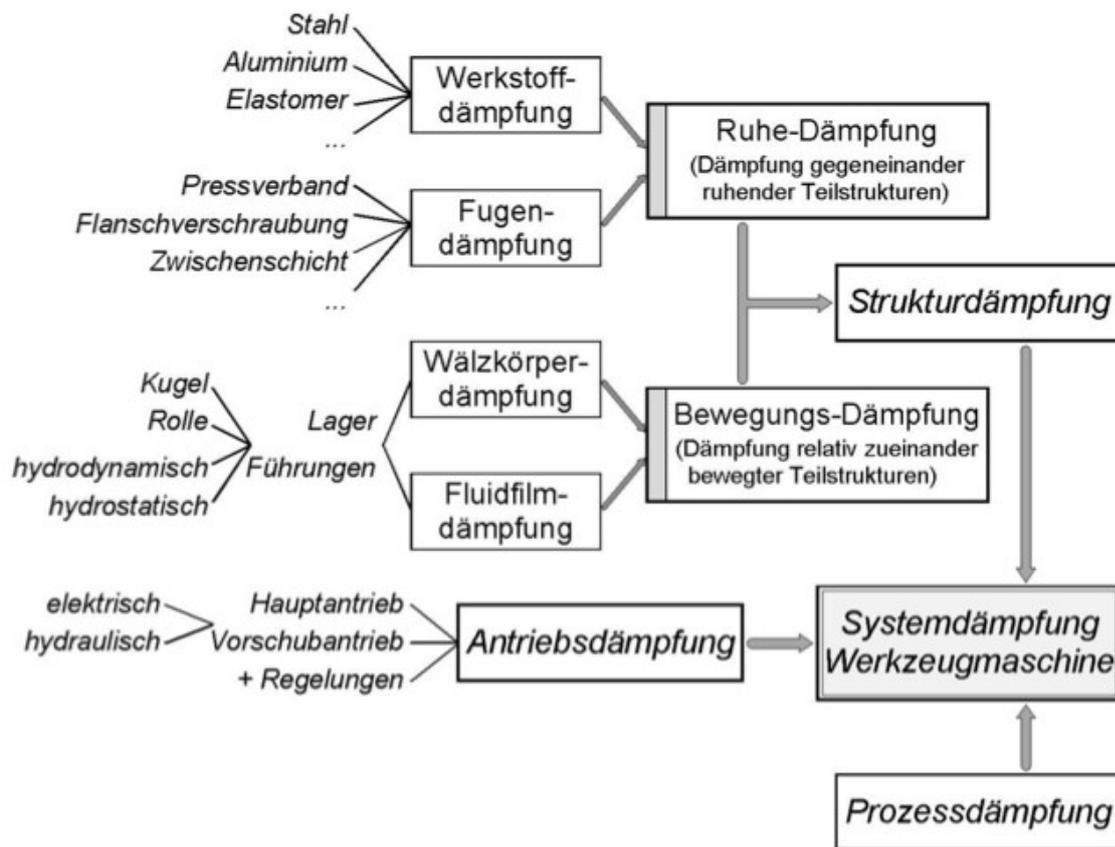


Bild 2.284 Klassifizierung der Dämpfung nach Objektsicht

Zuerst geht es um die Entscheidung zwischen linearer und nichtlinearer Dämpfung. Kriterium dafür ist, ob das spezifische Dämpfungsvermögen amplitudenabhängig ist oder nicht, Bild 2.285.



Spezifische Dämpfung (ψ) = Dämpfungsenergie (S) / Potenzielle Energie (U)

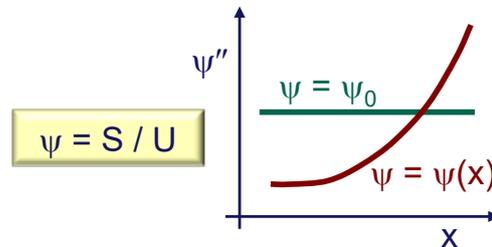
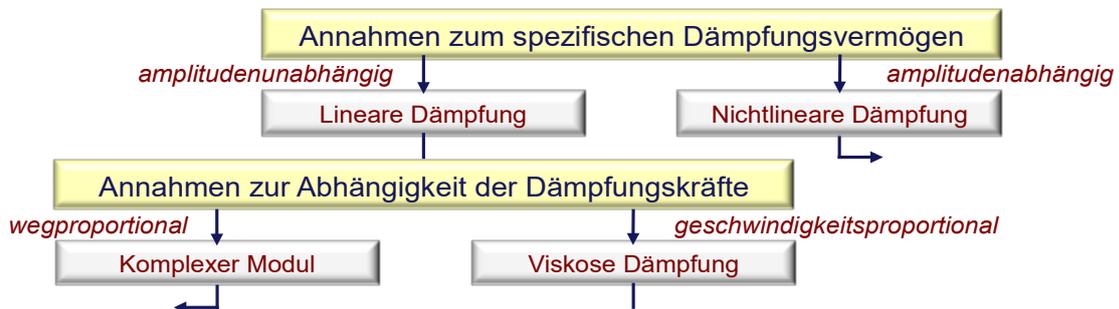


Bild 2.285 Spezifische Dämpfung

Da die globale Dämpfung an WZM-Strukturen amplitudenunabhängig ist, verfolgen wir den Pfad der linearen Dämpfung weiter und kommen zu den Annahmen über die Abhängigkeit der Dämpfungskräfte. Da der Ansatz geschwindigkeitsproportionaler Dämpfungskräfte gute Ergebnisse bei der Dämpfungsbeschreibung von WZM-Strukturen aufweist und unter bestimmten Voraussetzungen sich die Ansätze weg- und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfungskräfte gegenseitig überführen lassen, wird der Ansatz viskoser Dämpfung weiter verfolgt, Bild 2.286.



Dämpfungskräfte:

$$F_D = k \cdot dx/dt = k \cdot j\omega \cdot x$$

$$F_D = jE_k \cdot x$$

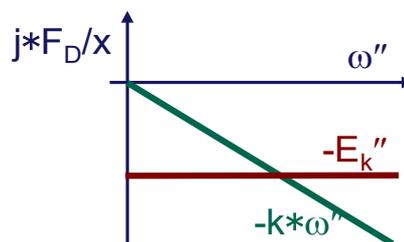


Bild 2.286 Abhängigkeit der Dämpfungskräfte

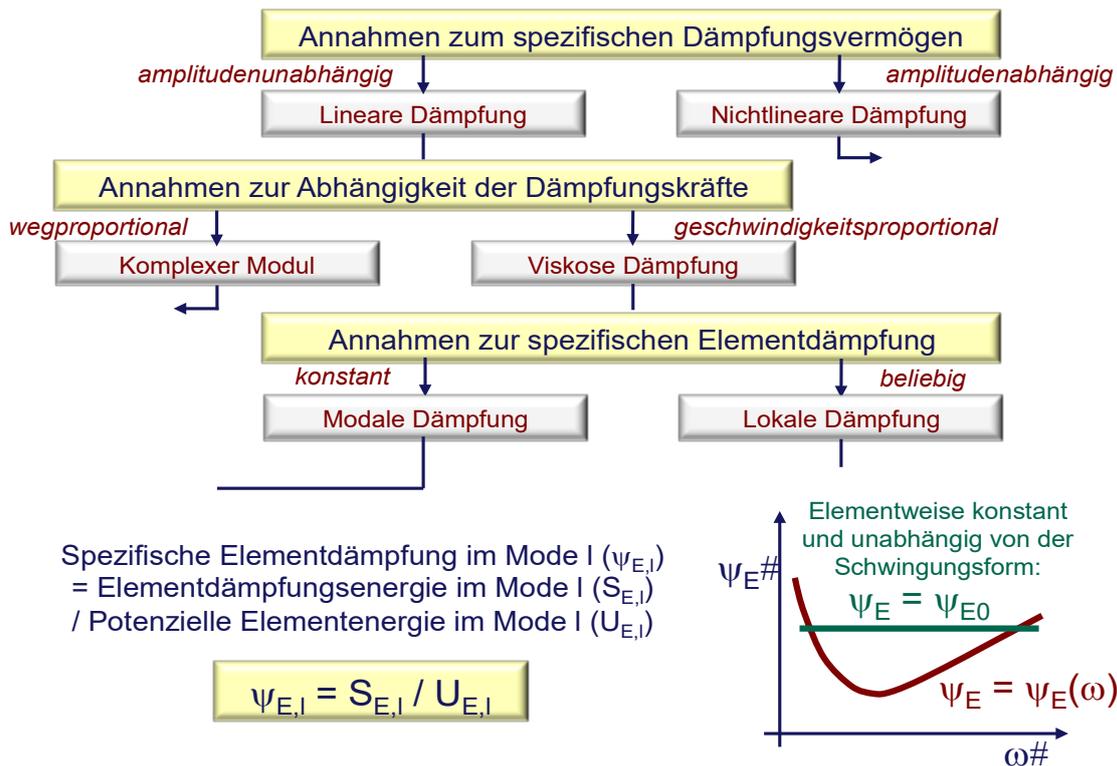


Bild 2.287 Spezifische Elementdämpfung

Nun steht die Entscheidung zur spezifischen Elementdämpfung an, Bild 2.287. Da haben sich sowohl die modale als auch die lokale Dämpfungsbeschreibung an Werkzeugmaschinen bewährt, wenn auch die praktische Anwendung der „lokalen“ Elementdämpfung aufgrund der Annahmen zum Charakter der Schwingungsformen, Bild 2.288, häufig auch zur modalen Dämpfung führt.

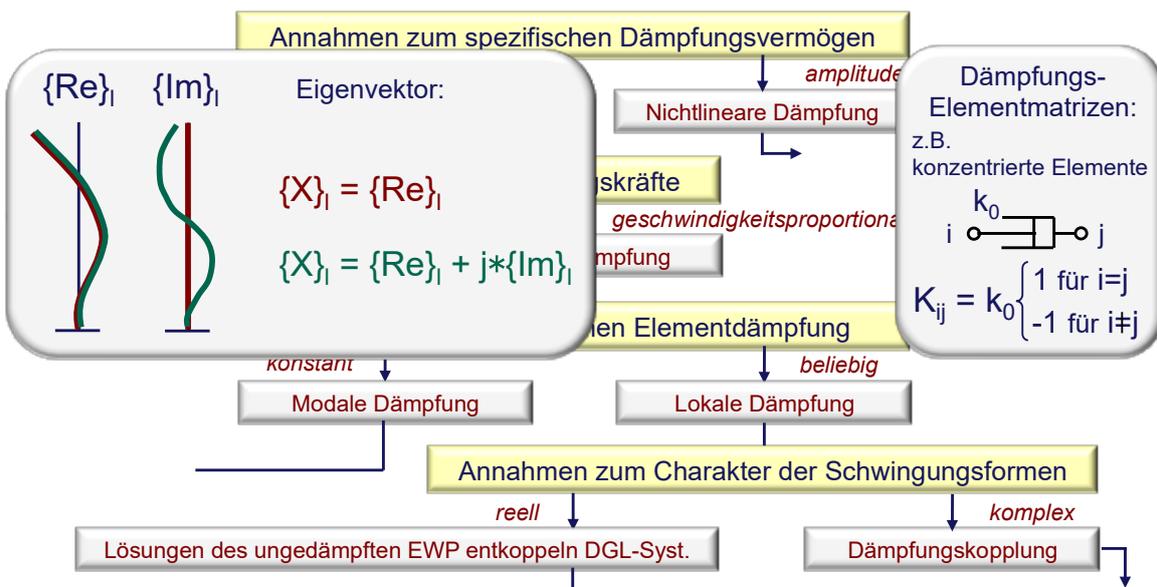


Bild 2.288 Charakter der Schwingungsformen

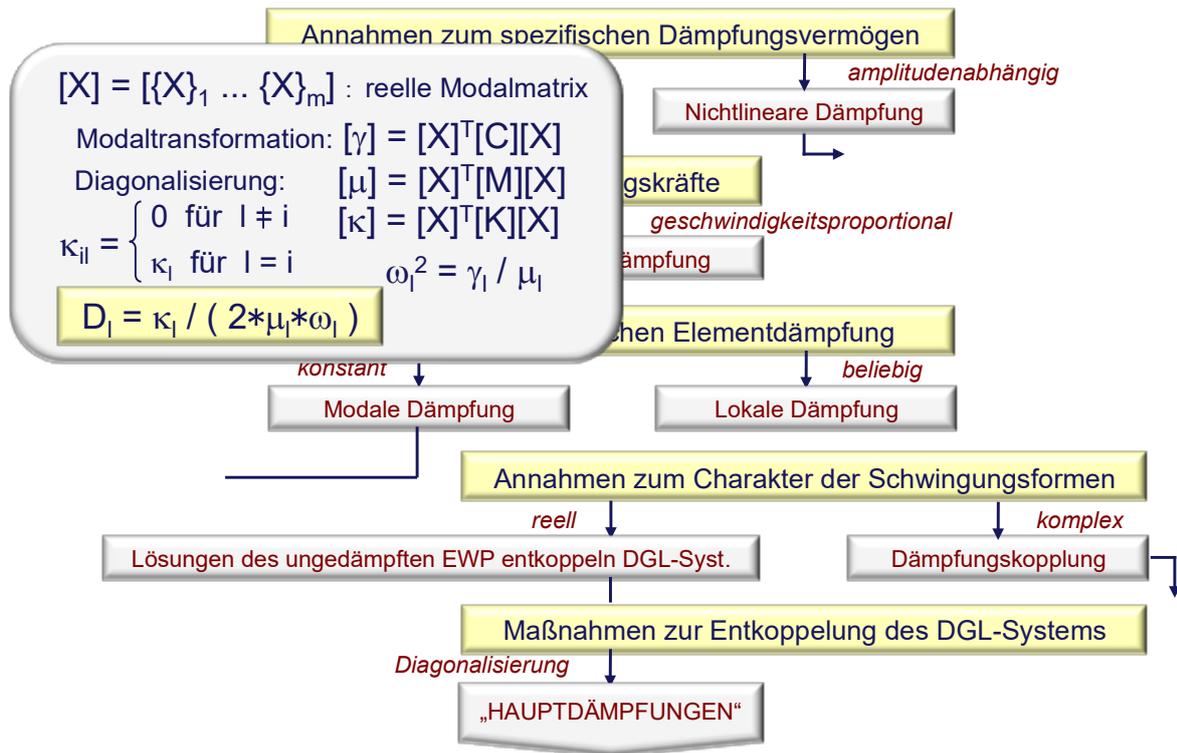


Bild 2.289 Entkopplung des DGL-Systems – „Hauptdämpfung“

Die Maßnahmen zur Entkopplung des DGL-Systems auf Basis der Lösungen des ungedämpften Eigenwertproblems führen zuerst auf die sogenannten „Hauptdämpfungen“.

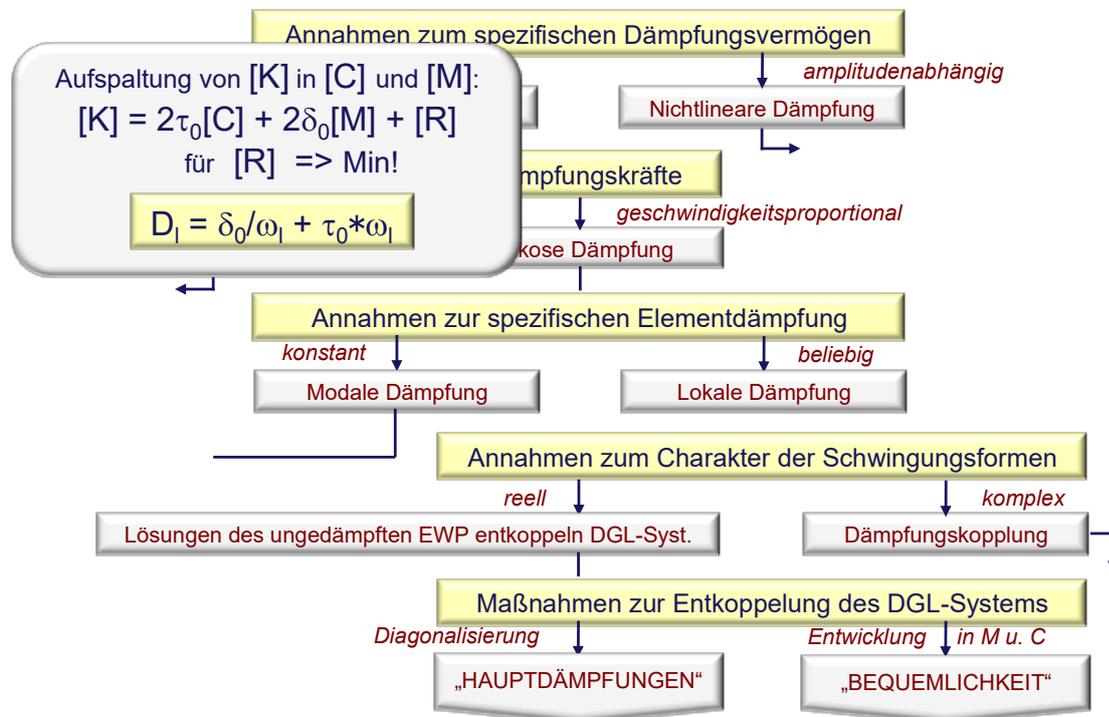


Bild 2.290 Entkopplung des DGL-Systems – „Bequemlichkeit“

Diese erhält man, wenn die Modaltransformation auf die Dämpfungskonstantenmatrix angewendet wird und danach alle Nebendiagonalelemente zu Null gesetzt werden, Bild 2.289. Eine zweite Möglichkeit zur Entkopplung besteht in der Entwicklung der Dämpfungskonstantenmatrix als proportional zur Trägheits- und Steifigkeitsmatrix. Man spricht dann von der Rayleigh-Dämpfung bzw. vom sogenannten „Bequemlichkeits“-Ansatz, Bild 2.290.

Wenn man von vornherein modale Dämpfung voraussetzt, dann stellt der Ansatz lokaler Verlustfaktoren einen äußerst praktikablen und effizienten Weg dar, Bild 2.291.

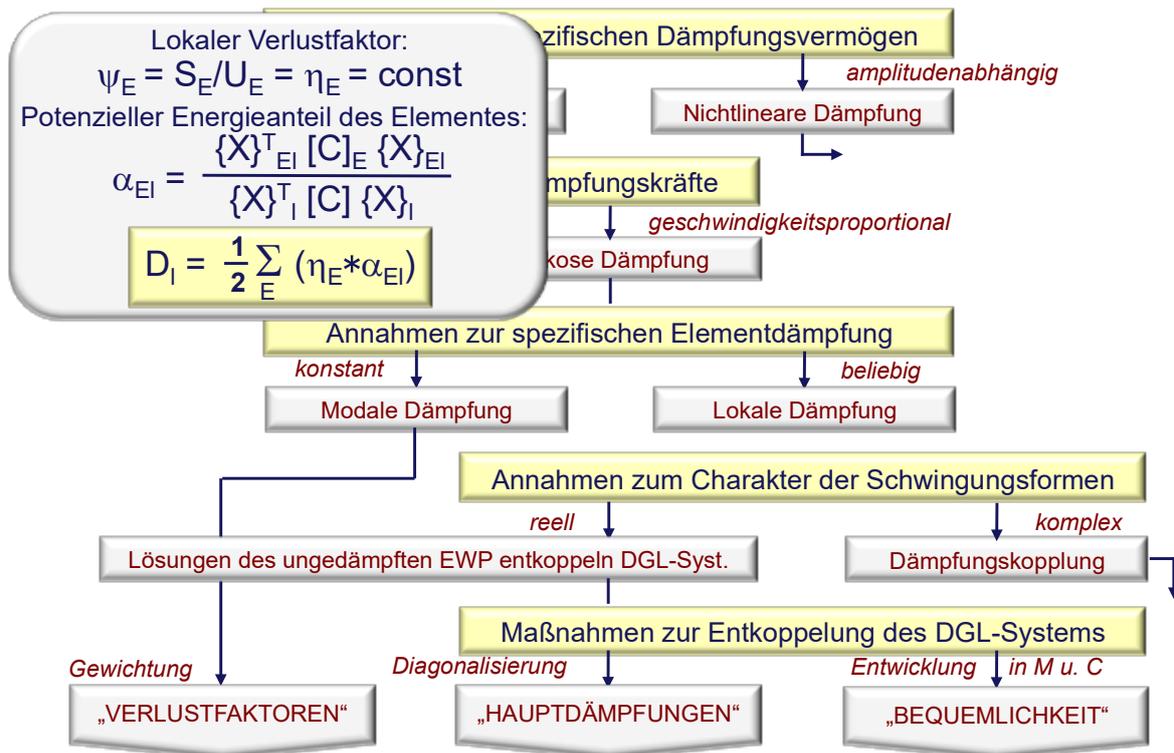


Bild 2.291 Lokaler Verlustfaktor

Der *Rayleigh-Ansatz* ist die gebräuchlichste Dämpfungsbeschreibung. Dabei geht es weniger um die Güte der Beschreibung als um die Beschaffbarkeit der benötigten Parameter, Bild 2.292.

Aufgrund der praktischen Bedeutung, als Kompromiss zwischen lokaler Beschreibung und globaler Wirkung, hat der *Verlustfaktor-Ansatz* großes Potenzial zur Anwendung an WZM-Strukturen. Deshalb ist im Bild 2.293 die ausführliche Ableitung des Ansatzes und ein einfaches Beispiel zur Anwendung gezeigt.

Aufspaltung von $[K]$ in Linearkombinationen von $[M]$ und $[C]$: $[K] = 2\delta_0[M] + 2\tau_0[C]$

Damit gilt für die Modalparameter:

$$\kappa_1 = 2\delta_0\mu_1 + 2\tau_0\gamma_1$$

mit $\kappa_1/\mu_1 = 2\delta_1$, $\gamma_1/\mu_1 = \omega_1^2$ und $D_1 = \delta_1/\omega_1$

folgt

$$D_1 = \delta_0/\omega_1 + \tau_0*\omega_1$$

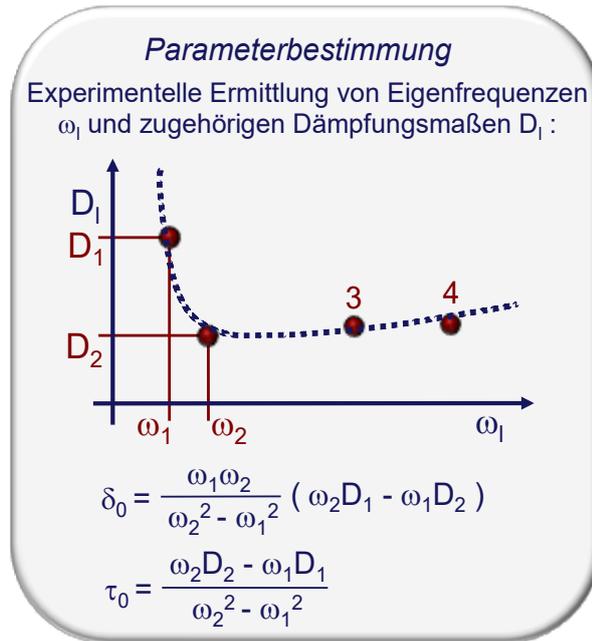
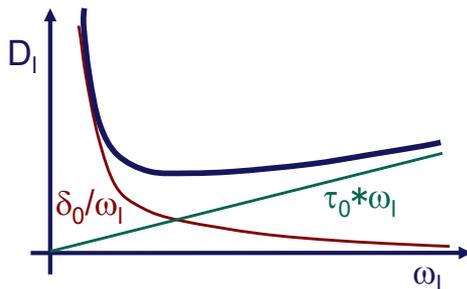


Bild 2.292 Dämpfungsbeschreibung für praktisch beschaffbare Parameter – Rayleigh-Ansatz

Spezifische Dämpfung (Verhältnis von Dämpfungs- zu potenzieller Energie) ist elementweise konstant und unabhängig von der Schwingungsform (typisch für Material- und Strukturdämpfung)

$$\psi_E = S_E/U_E = \text{const} = \eta_E : \text{lokaler Verlustfaktor (latente Dämpfungsfähigkeit)}$$

In jeder Schwingungsform (Mode) gilt für die modale Dämpfung (Dämpfungsmaß):

$$D_1 = S_1 / 2U_1$$

Mit $S_1 = \sum_E \# S_{E1}$ wird

$$D_1 = \frac{1}{2} \left(\sum_E \# S_{E1} \right) / U_1 = \frac{1}{2} \sum_E \# \frac{S_{E1} * U_{E1}}{U_1}$$

Durch $\eta_E = \frac{S_{E1}}{U_{E1}}$ und $\alpha_{E1} = \frac{U_{E1}}{U_1}$ folgt

$$D_1 = \frac{1}{2} \sum_E \# (\alpha_{E1} * \eta_E)$$

Die lokale Dämpfung (η_E) wird stärker in der Schwingungsform global wirksam (D_1), in welcher die lokale Beanspruchung relativ hoch ist (α_{E1})!

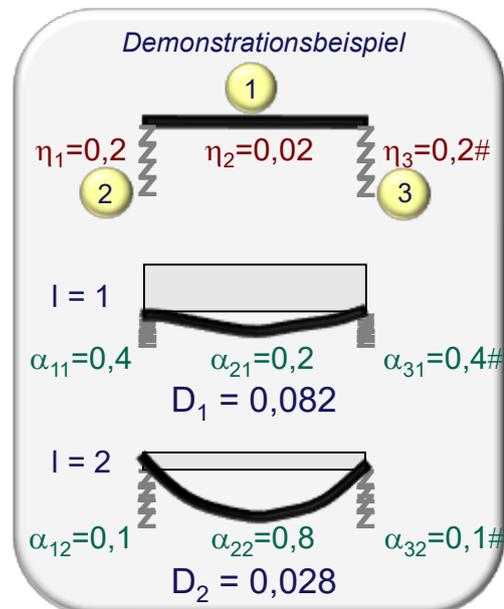


Bild 2.293 Dämpfungsbeschreibung für praktisch beschaffbare Parameter – Verlustfaktor-Ansatz

In Tabelle 2.11 sind die Umrechnungen zwischen den verschiedenen Dämpfungsparametern zusammengestellt. In dieser einfachen Form sind die Beziehungen streng nur unter den modalen Parametern allgemein gültig. Die anderen Relationen gelten nur für SDoF-Systeme.

Parameter	$(*k_{ij})$	$(*\eta_E)$	$(*\delta_l)$	$(*D_l)$
Dämpfungskonstante (konzentriert) $k_{ij} [Ns/m] =$	1	$\sqrt{c * m}$	$2 * m$	$2 * \sqrt{c * m}$
Verlustfaktor (elementweise) $\eta_E [./.] =$	$1/\sqrt{c * m}$	1	$2/\omega_l$	2
Abklingkonstante (modal) $\delta_l [s^{-1}] =$	$1/(2 * m)$	$\omega_l/2$	1	ω_l
Dämpfungsmaß (modal) $D_l [./.] =$	$1/(2 * \sqrt{c * m})$	1/2	$1/\omega_l$	1

(* gilt streng nur für den „Einmassenschwinger“ bzw. für modale Parameter,
d.h. $c = \gamma_l$, $m = \mu_l$, $k = \kappa_l$

Tabelle 2.11 Beziehungen zwischen Dämpfungsparametern

2.2.3.4.9 Zerspanungsstabilität

Die instabile Zerspanung ist eine der Erscheinungsformen selbsterregter Schwingungen an Werkzeugmaschinen, Bild 2.294.

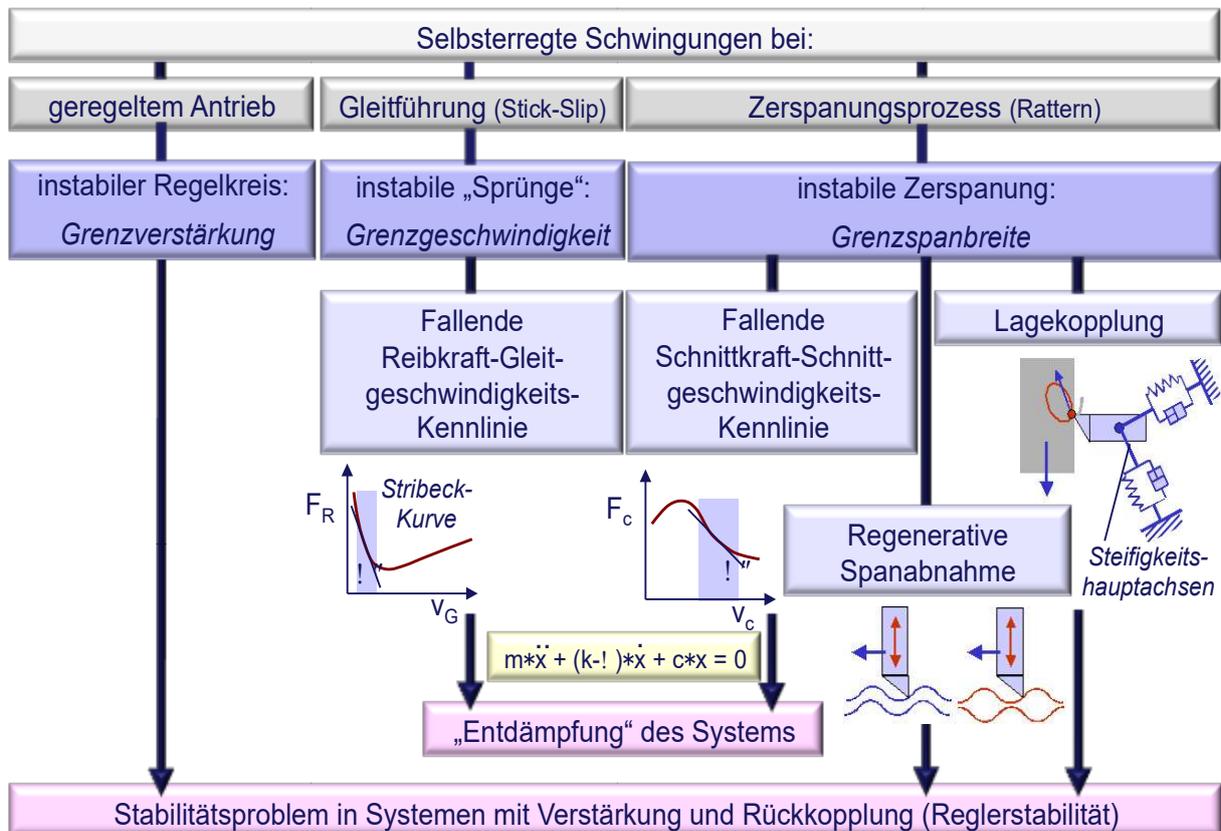


Bild 2.294 Ursachen für selbsterregte Schwingungen

Das Bearbeitungsergebnis der spanenden Fertigung, gemessen an Bauteilqualität, Fertigungszeit und Ressourceneinsatz, Maschinenauslastung und Werkzeugverschleiß, ist das Resultat der Wechselwirkungen zwischen Zerspanungsprozess und Werkzeugmaschine. Von der Zerspanungsstabilität werden alle diese Eigenschaften beeinflusst, Bild 2.295.

In Bild 2.296 sind die Einflussgrößen auf die Zerspanungsstabilität zusammengestellt.

Mechanismen, die selbsterregte Schwingungen auslösen und zu Instabilitäten führen können, sind:

- der *Regenerativ*effekt [22], [29], [30]
 - Die Ursache für den Regenerativ
- die *Lagekopplung*, [22], [29], [31]
 - Lagekopplung kann an gekoppelten MDoF-Systeme auftreten, in denen Kreuznachgiebigkeiten existieren. Das bedeutet, dass bei Anregung in einer Richtung Verformungen nicht nur in Anregungsrichtungen sondern auch senkrecht dazu auftreten. Diese Kreuznachgiebigkeiten beeinflussen das Stabilitätsverhalten und sind typisch für WZM-Strukturen.
- eine *fallende Schnittkraft-Schnittgeschwindigkeits-Kennlinie*, [32]
 - Wenn bei steigender Schnittgeschwindigkeit die Schnittkraft fällt, führt das im Modell zu einem negativen Koeffizienten vor der Geschwindigkeit und kann so zu einer Entdämpfung des Systems und in deren Folge zur Instabilität führen.
- die *komplexe Übertragungsfunktion $F_c(h)$* , [33]
 - Insbesondere bei kleinen Spannungsdicken h können Kontaktmechanismen zwischen Freifläche und Werkstückoberfläche zur sogenannten Prozessdämpfung beitragen. Damit erhalten die Prozesskraft-Modelle einen komplexen Anteil, woraus sich ein Einfluss auf die Prozessstabilität ergeben kann.

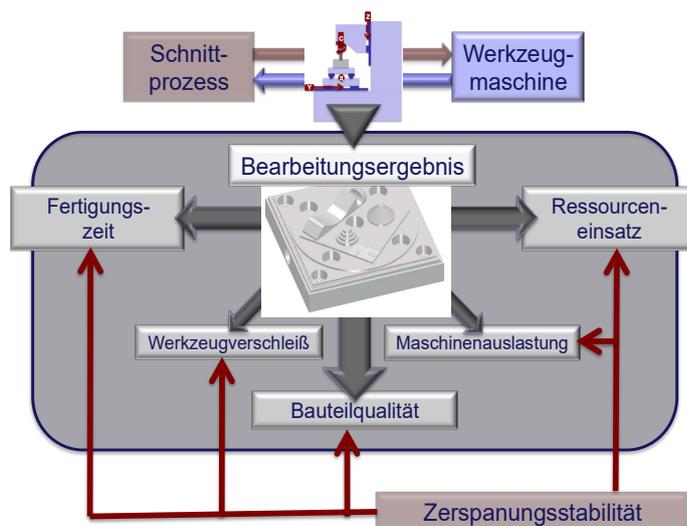


Bild 2.295 Einfluss der Zerspanungsstabilität auf Qualität und Produktivität

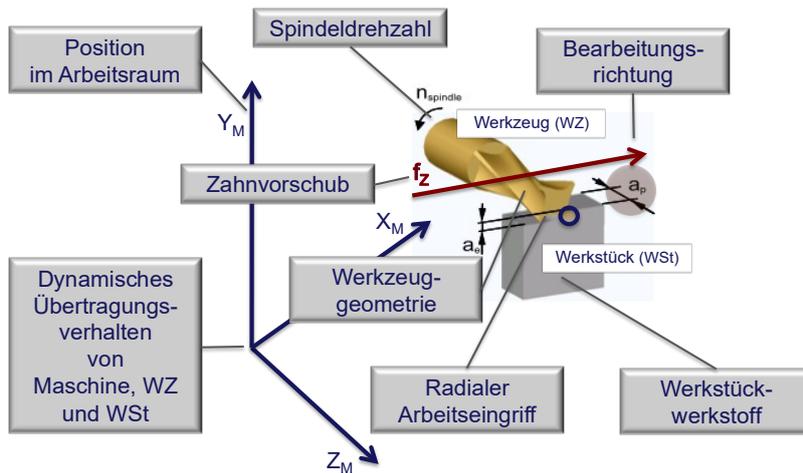


Bild 2.296 Einflussgrößen auf die Zerspanungsstabilität

Die Ergebnisse der Stabilitätsanalyse werden gewöhnlich in sogenannten Ratterkarten dargestellt, Bild 2.297. Sie markieren die Grenze zwischen stabiler und instabiler Zerspanung anhand einer Eingriffsgröße,

z.B. die Spannungsdicke oder -breite, in Abhängigkeit der Drehzahl.

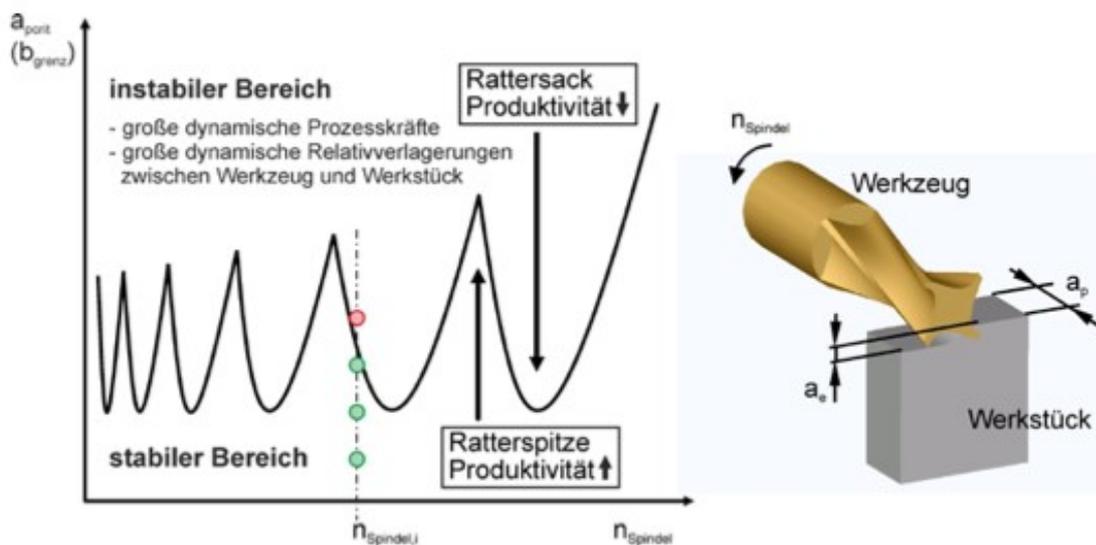


Bild 2.297 Ratterkarte

Die Berechnung der Ratterkarten ist im Frequenz- und im Zeitbereich möglich. Die Frequenzbereichsverfahren gehen auf Tlustý und Poláček [29] sowie Tobias und Fishwick, [30] zurück. Um die räumliche Prozesskraft-Relativverformungs-Beziehungen auf ein eindimensionales Problem überführen zu können, werden die Größen in die Richtung der Spannungsdicke transformiert.

Ausgehend von den dynamischen Nachgiebigkeitsfrequenzgängen der Maschine am TCP

$$[G] = \begin{pmatrix} G_{X,F_x} & G_{X,F_y} & G_{X,F_z} \\ G_{Y,F_x} & G_{Y,F_y} & G_{Y,F_z} \\ G_{Z,F_x} & G_{Z,F_y} & G_{Z,F_z} \end{pmatrix}$$

und unter Anwendung prozessspezifischer Richtungsfaktoren

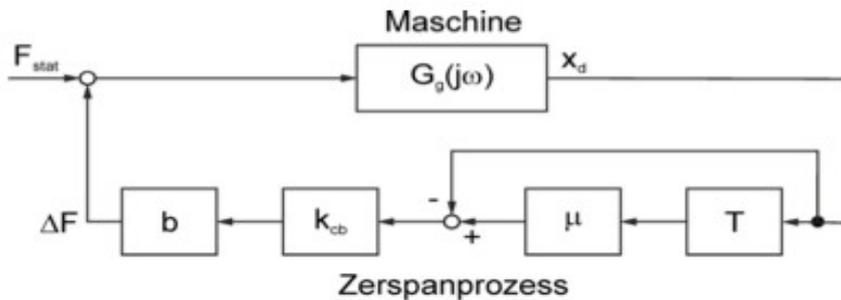
$$\{r_{Z,M}\} = \{r_{Fu,x} * r_{Fv,y} * r_{Fw,z}\} \quad \text{und} \quad \{r_{M,Z}\} = \{r_{x,u} * r_{y,v} * r_{z,w}\}$$

erhält man so die sogenannte gerichtete Ortskurve, [7],

$$G_g = \{r_{z,M}\}[G]\{r_{M,z}\}^T$$

Beim Ortskurvenverfahren wird das Nyquist-Kriterium auf die Übertragungsfunktion G_0 des aufgeschnittenen Wirkungskreises, Bild 2.298, angewandt.

$$G_0 = b * k_{cb} * (e^{-j\omega T}) * G_g$$



- x_d Relativverlagerung Werkzeug-Werkstück in Spanungsdickenrichtung
- μ Überdeckungsfaktor
- T Totzeit
- k_{cb} dynamische Schnittsteifigkeit
- b Spannungsbreite
- $G_g(j\omega)$ gerichtetes dynamisches Übertragungsverhalten relativ zwischen Maschine und Werkzeug

Bild 2.298 Wirkungskreis, nach [7]

Die Nyquist-Bedingungen lauten

$$Re(G_0) = \left\{ \begin{array}{ll} < 1 \text{ stabil} \\ = 1 \text{ Stabilitätsrand} & Im(G_0 = 0) \\ > 1 \text{ instabil} \end{array} \right\}$$

Bild 2.299 zeigt Beispiele für die Anwendung des Nyquist-Kriteriums auf die gerichtete Ortskurve.

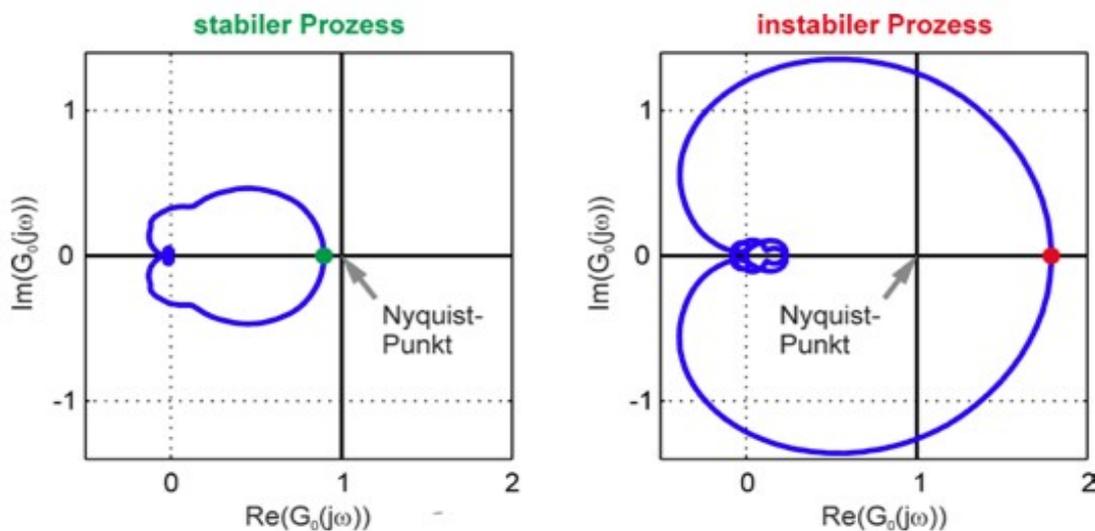


Bild 2.299 Anwendungsbeispiele für das Nyquist-Kriterium, nach [14]

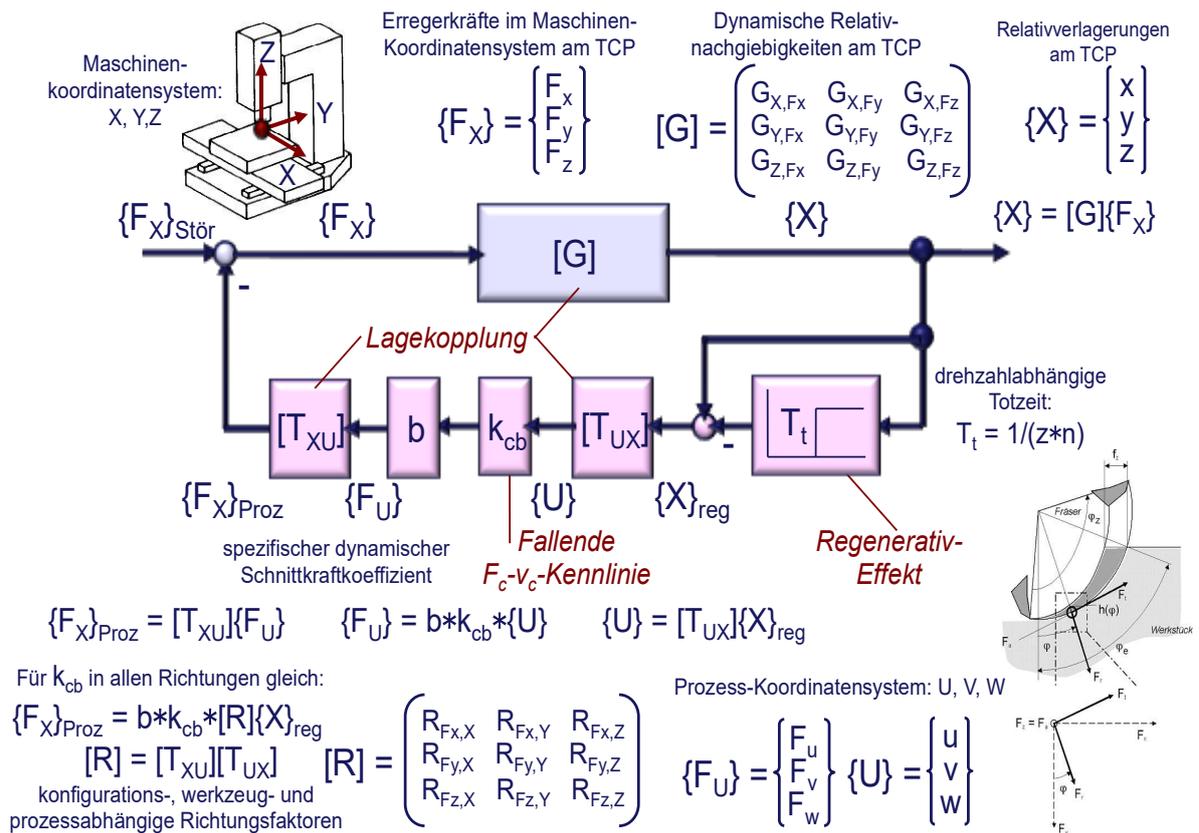


Bild 2.300 Gesamtheitliche Beschreibung der Ratterproblematik

Eine allgemeine räumliche Darstellung, die alle Mechanismen der Selbsterregung in den Wechselwirkungen von Prozess und Maschine aufnehmen und abbilden kann, ist mit Bild 2.300 gegeben.

2.2.3.4.10 Zeitbereich

Im Zeitbereich können dynamisch bedingte Verformungen sowohl linearer als auch nichtlinearer Systeme beschrieben werden.

Lineare Erregungs- und Struktureigenschaften

Von den Lösungen für lineare Systeme im Zeitbereich soll hier nur der „Einmassenschwinger“ betrachtet werden.

Schwinger mit Freiheitsgrad 1 (SDoF)

Die zeitliche Lösung für das freie Ausschwingen des SDoF-Systems und die Ableitung der Dämpfungsbestimmung aus der Ausschwingkurve sind in Bild 2.301 und nachfolgend angegeben.

Es ist $x(t) = X_0 e^{\lambda t}$, $\dot{x}(t) = \lambda x$, $\ddot{x}(t) = \lambda^2 x$

Für den harmonischen Ansatz gilt

$$k/m = 2\delta \quad c/m = \omega_0^2 \quad D = \delta/\omega_0 \quad j = \sqrt{-1} \quad D \ll 1$$

Die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

hat die Lösung

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{1 - D^2}.$$

Die Ausschwingkurve nach Bild 2.301 ergibt sich zu

$$x(t) = X_0 e^{(-\delta + j\omega)t}$$

wobei gilt $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j * \sin(\omega t) = \cos(\omega t - \varphi)$

Und damit die Funktion

$$x(t) = X_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi).$$

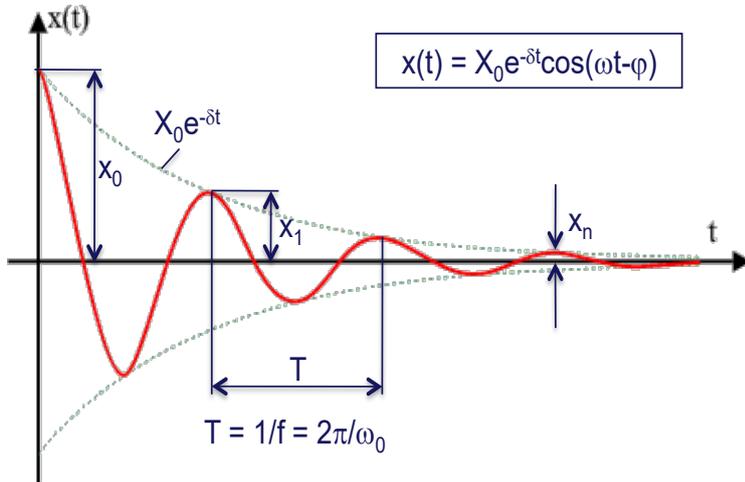


Bild 2.301 Freie Schwingungen und Logarithmisches Dekrement für das SDoF-System

Nichtlineare Erregungs- und Struktureigenschaften

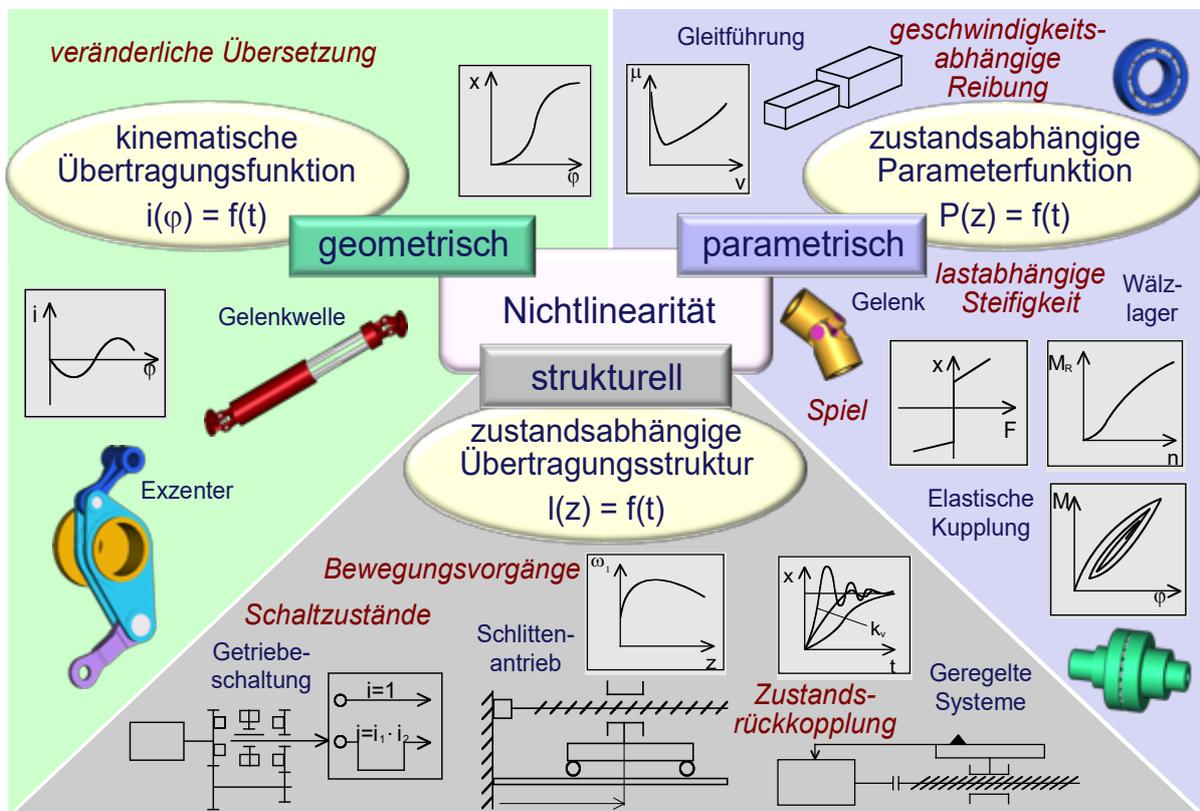


Bild 2.302 Typische Nichtlinearitäten im Verhalten von WZM

Für die Behandlung nichtlinearer Probleme ist häufig der Zeitbereich die einzige Beschreibungs- und Lösungsmöglichkeit. Der Bedarf nach Berücksichtigung nichtlinearer geometrischer, parametrischer oder struktureller Eigenschaften ist besonders auf Baugruppenebene bei Werkzeugmaschinen gegeben, Bild 2.302.

Die Lösungen für derartige nichtlineare Modelle werden gewöhnlich nicht „berechnet“ sondern „simuliert“. Es gibt ausreichend Literatur, die die Herangehensweise und das Wesen der klassischen digitalen Simulation von der Modellbildung über die mathematische Abarbeitungsgrundlage bis zu den Integrationsverfahren systematisch beschreibt. Besonders geeignet zur Einarbeitung kann man die Bücher von *Bosselt* [34], [35] empfehlen. Hier soll lediglich der knappe Versuch unternommen werden, mit einigen flüchtigen Strichen charakteristische Konturen der digitalen Simulation zu skizzieren, um ein Grundverständnis für die weiteren Darstellungen - insbesondere auch alternativer Verfahrensweisen - voraussetzen zu können. Um dabei von vornherein keine Erwartungen hinsichtlich Vollständigkeit und Geschlossenheit aufkommen zu lassen, soll dies an einem denkbar einfachen Beispiel geschehen. Der Einmassenschwinger – besser Schwinger mit dem Freiheitsgrad 1 (SDoF) – mit konzentrierten Parametern und einem diskreten Freiheitsgrad dürfte, als Beispiel aus dem Bereich der Mechanik, ausreichend die Forderungen nach Bekanntheit sowie Einfachheit erfüllen und dennoch alle wesentlichen Charakteristika der Simulation demonstrieren lassen. Es darf uns im Moment auch nicht stören, dass wir damit bereits in der Modellebene in das Problem einsteigen und so den wichtigsten Arbeitsschritt, nämlich die Modellfindung, zunächst übergehen.

Ablauf am Beispiel

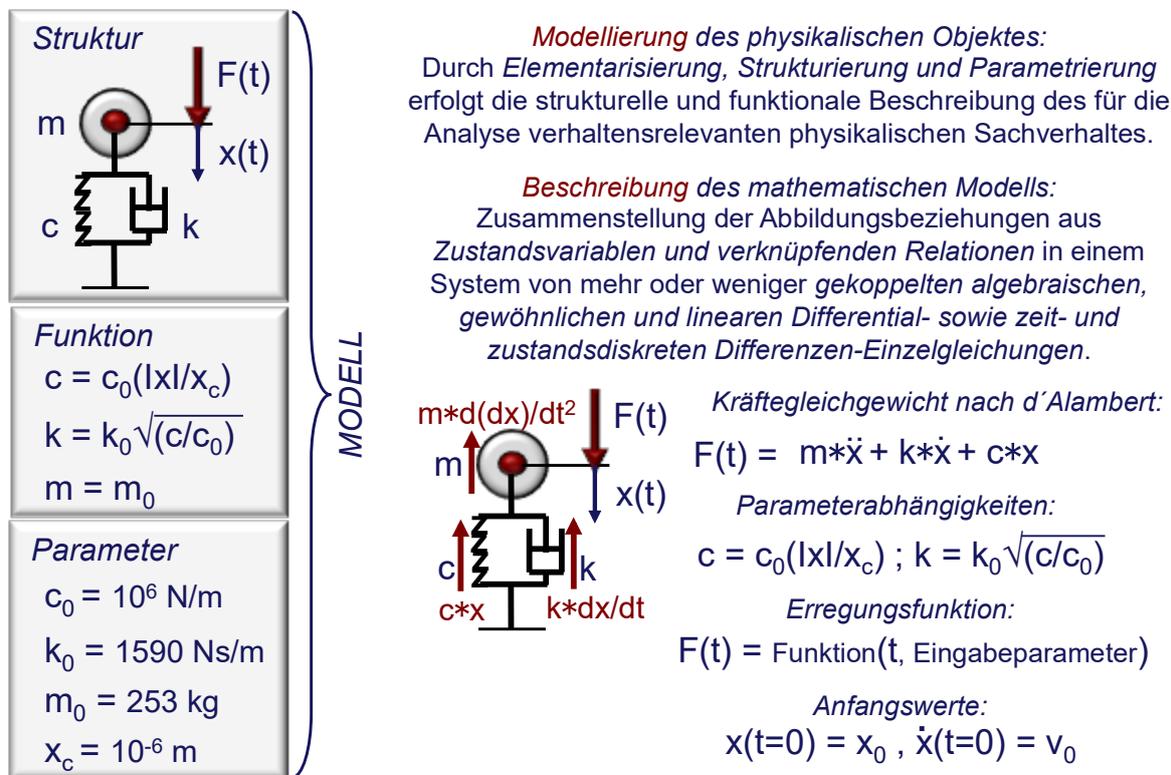


Bild 2.303 Simulation am Schwinger mit Freiheitsgrad 1 – Modellierung und Beschreibung

An unserem Beispiel wollen wir nun die einzelnen Etappen von der Problemaufbereitung bis zur Simulationsrechnung verfolgen:

Modellfindung zur funktionalen Beschreibung über die Elementarisierung, Strukturierung und Parametrierung des für die Analyse verhaltensrelevanten physikalisch-technischen Sachverhaltes.

Vereinbarungsgemäß nehmen wir hier für unser Beispiel ohne Herleitung das Ergebnis mit Bild 2.303 vorweg.

Mathematische Beschreibung des algorithmischen Modells als Zusammenstellung der Abbildungsbeziehungen aus Zustandsvariablen und verknüpfenden Relationen in einem System von mehr oder weniger gekoppelten algebraischen, gewöhnlichen und linearen Differential- sowie zeit- und zustandsdiskreten Differenzen-Einzelgleichungen.

Wir stellen die Modellbeziehungen des Schwingers aus dem Kräftegleichgewicht, den Parameterabhängigkeiten und den Anfangswerten zusammen. Damit liegt die vollständige Beschreibung des algorithmischen Modells vor.

Transformation der Modellbeschreibung in eine lösungsorientierte Darstellungsform, z.B. als System von Zustandsgleichungen in Normalform für die Lösungsverfahren der zentralen Integration oder zur Ableitung von Integralgleichungen, die wiederum die Grundlage liefern können für eine Darstellung als Signalflussplan bzw. Blockdiagramm für eine ablauforientierte Notation der Programmfolge für die Lösungsverfahren mit dezentraler Integration.

Die diversen Simulationssysteme unterstützen unterschiedliche Beschreibungsmöglichkeiten für die „Modelleingabe“, wir wollen für den Schwinger zunächst die Darstellungsweise als Signalflussplan bzw. Blockdiagramm betrachten, Bild 2.304. Bild 2.305 zeigt eine Realisierung des Signalflussplanes unter MATLAB/Simulink.

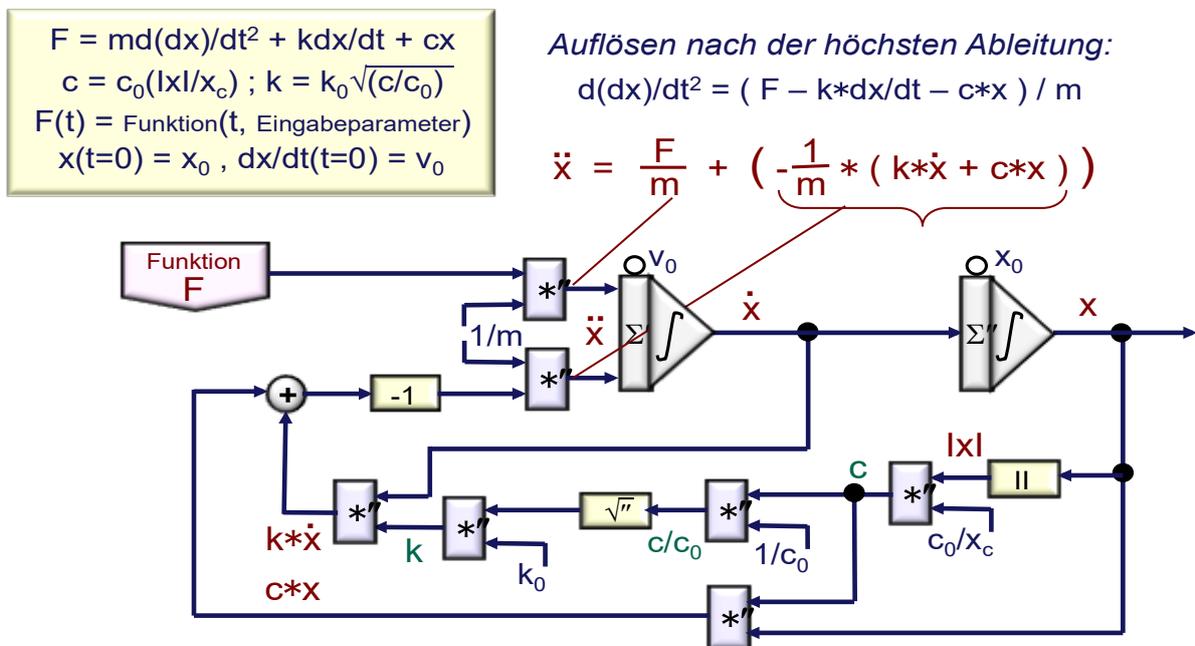


Bild 2.304 Simulation am Schwinger mit Freiheitsgrad 1 – Signalflussplan (Blockdiagramm)

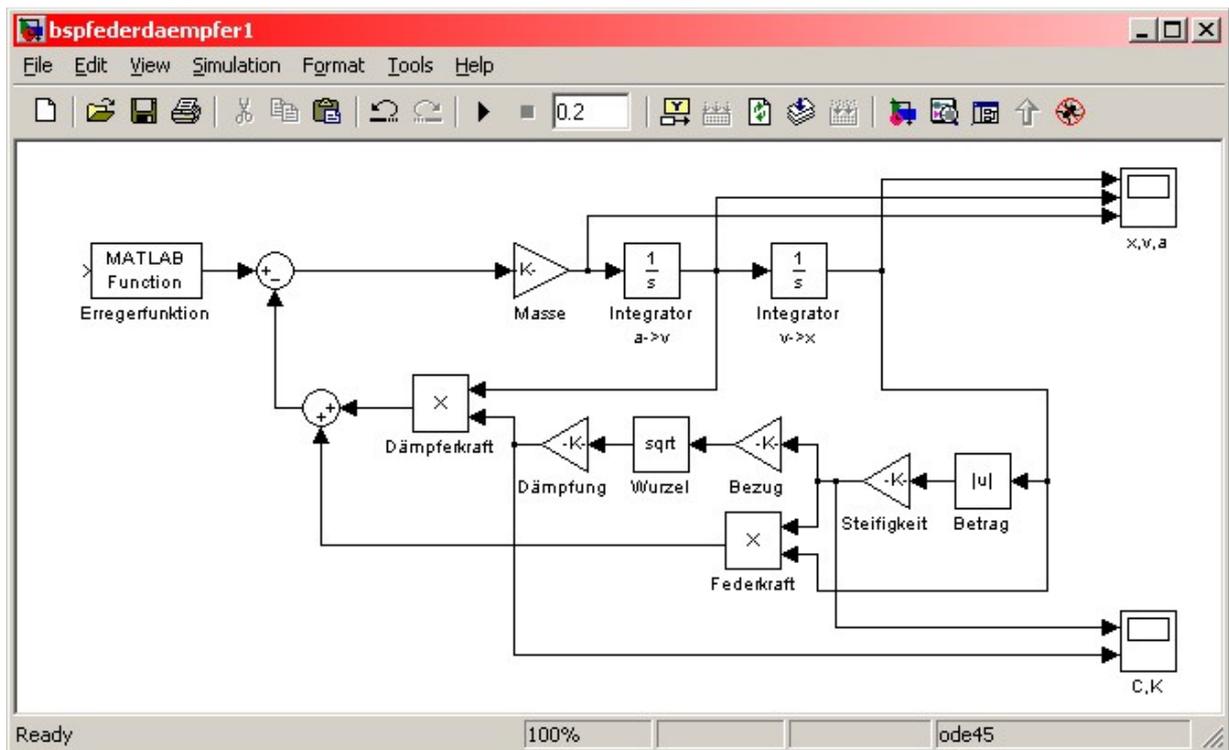


Bild 2.305 Signalfussplan unter MATLAB/Simulink

Verwendung eines Integrationsverfahrens zur zeitdiskreten numerischen Lösung der Differentialgleichungen.

Es soll hier gar nicht erst der Versuch unternommen werden, auf die Verfahrenswelt der numerischen Integration ernsthaft einzugehen. Für das Verständnis dürfte es ausreichend sein, das Grundprinzip zu charakterisieren, welches im Ersatz des kontinuierlichen Zeitstrahles durch die Aneinanderreihung diskreter Zeitschritte besteht und dadurch das Differential mit einem Differenzenquotienten annähert.

Aus dx/dt wird $(x(t_i) - x(t_{i-1})) / (t_i - t_{i-1})$.

Die verschiedenen Verfahren unterscheiden sich dann im wesentlichen in den Annahmen zum Verlauf des zu integrierenden Funktionals zwischen den diskreten Zeitschritten t_{i-1} und t_i , das heißt den damit zur Berechnung von $x(t_i)$ erforderlichen zurückliegenden Informationen sowie der Art und Weise der Zeitschrittfestlegung. Die Problematik lässt sich bereits am einfachen Beispiel erkennen: Mit $v(t) = dx/dt$ und $x(t_i) = x_i$, $v(t_i) = v_i$, entsprechend für $i - 1$ sowie $T = t_i - t_{i-1}$, betrachten wir die Ansätze und die Schrittweiten von Bild 2.306.

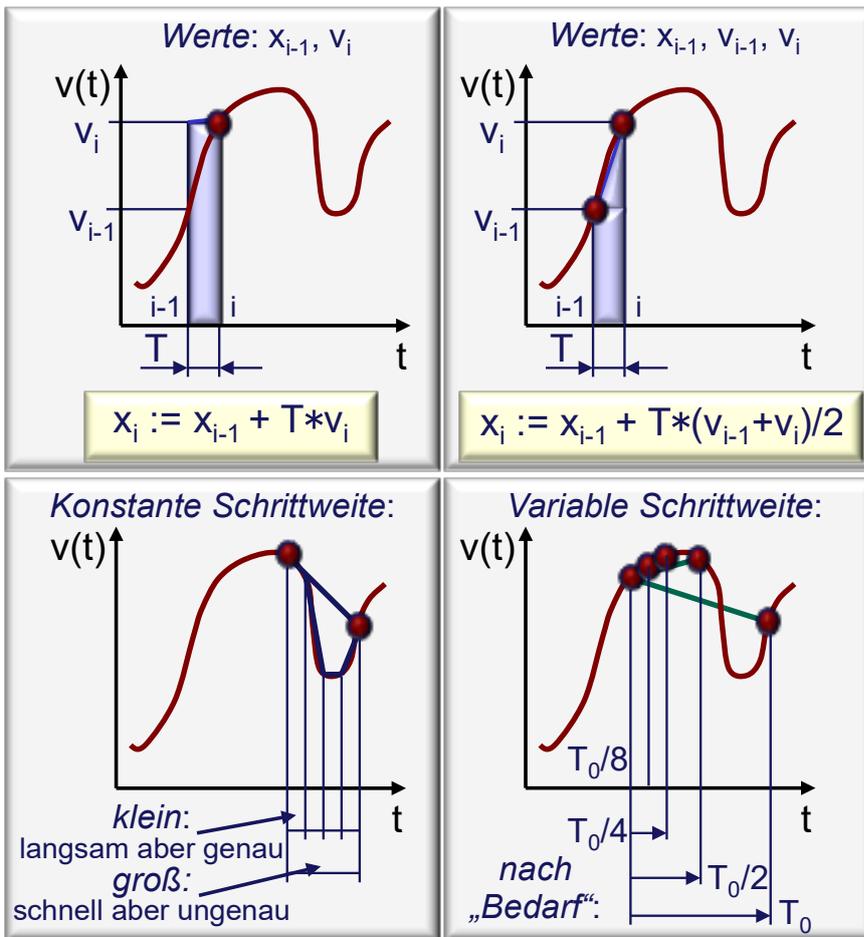


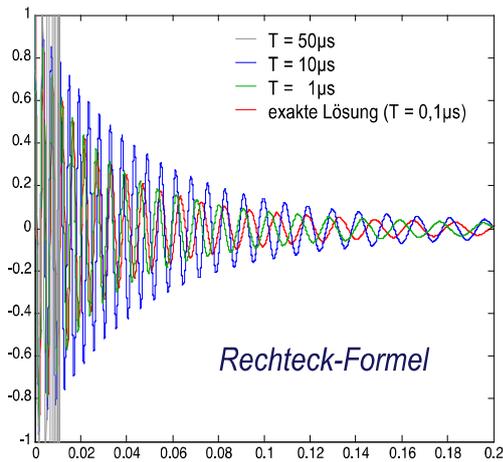
Bild 2.306 Ansätze und Schrittweiten für die Integration

Bild 2.307 zeigt die Auswirkungen der Integrationsansätze und der Zeitschrittweite auf die Simulationsergebnisse.

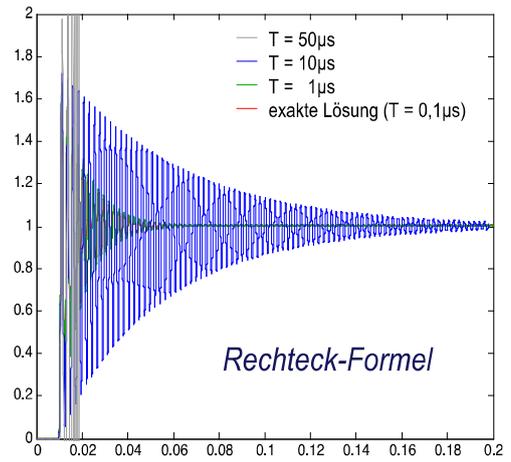
Die für unseren Schwinger benötigte Integration können wir also beispielsweise mit der allgemeinen Prozedur INTEGRAL(Xalt, Yneu, Yalt, T) bei konstanter Zeitschrittweite T realisieren.

$$\begin{aligned} X_{\text{neu}} &= \text{INTEGRAL}(X_{\text{alt}}, Y_{\text{neu}}, Y_{\text{alt}}, T); \\ &= X_{\text{alt}} + T \cdot (Y_{\text{neu}} + Y_{\text{alt}}) / 2; \end{aligned}$$

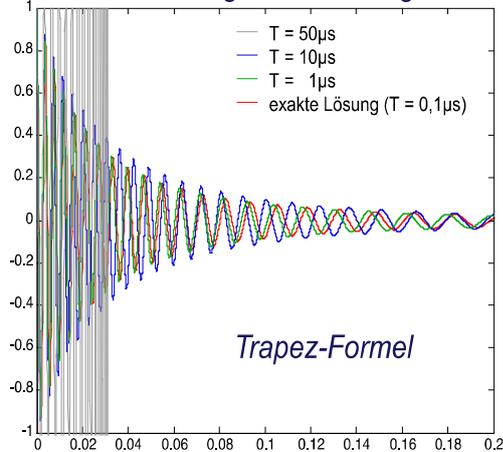
Offensichtlich müssen allerdings irgendwann die Werte für x und y ihre Belegung von *neu* auf *alt* tauschen - dies passiert unter anderem im Simulationszyklus.



Integration
mit
konstanter
Schrittweite



Freies Ausschwingen aus Anfangsauslenkung



Kraftsprung aus Null-Lage

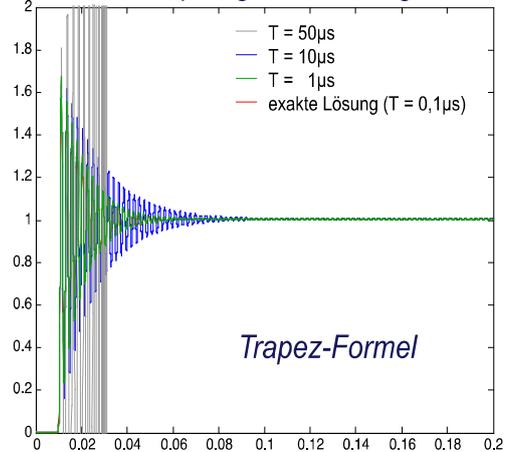


Bild 2.307 Einfluss der Integrationsformeln und der Zeitschrittweite auf die Lösung

Abarbeitung eines Simulationszyklus zur Realisierung der zeitschrittweisen Modellaktualisierung und Lösung.

Wir tragen nun für unser Beispiel alles zusammen, was wir benötigen: die konstanten Parameter, die Anfangswerte sowie die bereits notierte Programmfolge, wobei wir die vorangehend behandelte Prozedur verwenden. Dann müssen wir die Zeit weiterschreiten lassen, den Tausch von *neu* in *alt* organisieren und schließlich auch an die Ein- und Ausgabe denken. So erhalten wir mit Bild 2.308 die einfachste Form eines Simulationsprogramms.

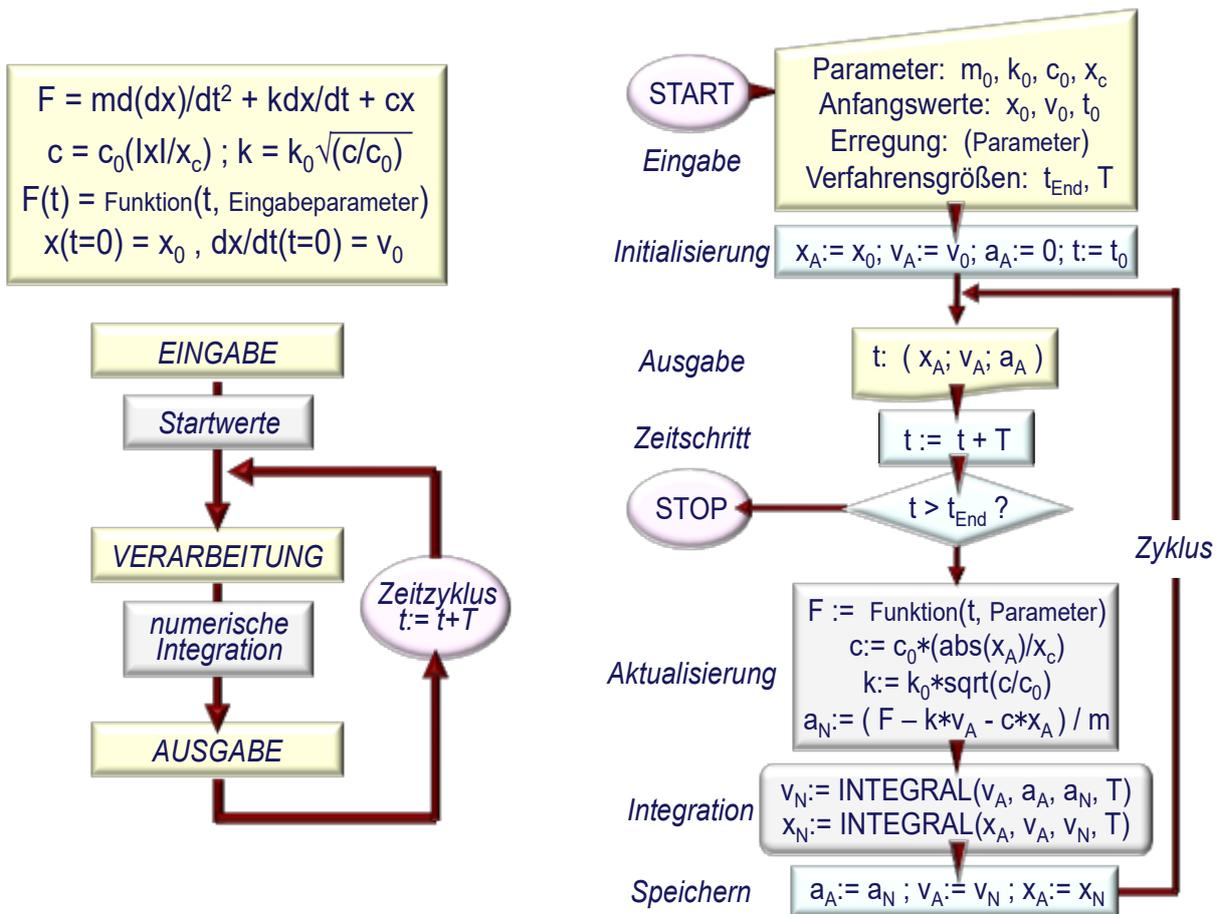


Bild 2.308 Simulation am Schwinger mit Freiheitsgrad 1 – Simulationsprogramm

Mit Bild 2.309 ist eine Realisierung des Simulationsprogramms unter MATLAB gezeigt.

Aus der Verallgemeinerung des skizzierten Beispielablaufes wird ersichtlich, dass zur Simulation die Stufen der *Modellierung* (als Vorbereitung des Modells zur Beschreibung), der *Beschreibung* (als problemorientierte Eingabe des Modells zur Speicherung), der *Abarbeitung* (als abarbeitungsorientierte Codierung des Modells zur Lösung) und der *Lösung* (als Verfahrensorganisation zur numerischen Integration) durchlaufen werden müssen. Zudem wird klar, dass Simulation ohne rechentechnische Unterstützung praktisch unmöglich ist und damit Software im Rahmen eines Simulationssystems geschaffen werden oder verfügbar sein muss.

```
1 function [t,x,v,a,C,K] = Simulation( m0, k0, c0, xC, x0, v0, tEnd, T)
2 Last = tEnd / T;
3 t(1) = 0;
4 x(1) = x0;
5 v(1) = v0;
6 a(1) = 0;
7 C(1) = 0;
8 K(1) = 0;
9
10 tAct = 0; xAct = x0; vAct = v0; aAct = 0;
11 i = 1;
12 while tAct <= tEnd
13     tAct = tAct + T;
14     i = i + 1;
15     cAct = c0 * abs(xAct) / xC;
16     kAct = k0 * sqrt( cAct / c0);
17
18     FAct = 0;
19     aAct = ( FAct - kAct * vAct - cAct * xAct) / m0;
20
21     vAct = v(i-1) + 0.5 * ( aAct + a(i-1)) * T;
22     xAct = x(i-1) + 0.5 * ( vAct + v(i-1)) * T;
23
24     t(i) = tAct;
25     x(i) = xAct;
26     v(i) = vAct;
27     a(i) = aAct;
28     C(i) = cAct;
29     K(i) = kAct;
30 end;
31 |
```

Simulation Ln 31 Col 1 OVR

Bild 2.309 Simulationsprogramm unter MATLAB

Integration

Die Lösungsgrundlage liefern die numerischen Integrationsverfahren, deren qualitative Charakteristik mit der Tabelle 2.12 gegeben ist.

Ablauforganisation	Art der Berechnung des neuen Systemzustandes	Zentralisierte Integration
		Lokale Integration
	Festlegung der Schrittweite	Konstante Schrittweite
		Schrittweitensteuerung
Integrationsformeln	Verwendung zurückliegender Funktionswerte	Einschrittverfahren
		Mehrschrittverfahren
	Verwendung von Stützstellen innerhalb eines Schrittes	Ohne Stützstellen (Euler)
		Mit Stützstellen (Runge-Kutta)

Tabelle 2.12 Charakteristik der Simulationsverfahren

Diese grobe Einteilung ist für die Beschreibung der in den meisten Simulationssystemen verwendeten Lösungsgrundlagen ausreichend.

Die Lösungsgrundlagen der numerischen Integrationsverfahren unterscheiden sich zunächst hinsichtlich der Organisation der Integration des Differentialgleichungssystems. Bezüglich der Art der Berechnung des neuen Systemzustandes kann zwischen der zentralisierten und der nichtzentralisierten Integration unterschieden werden. Bei der *zentralisier-*

ten Integration werden die organisatorischen Voraussetzungen geschaffen, um durch die Beschreibung des Systemzustandes als Ganzes (Zustandsvektor) den neuen Zustand des Systems über die Addition eines Inkrementvektors für das gesamte System unabhängig von der Reihenfolge der Zustandsgleichungen zum gleichen Diskretisierungszeitpunkt zu erhalten. Bei der *nichtzentralisierten Integration* wird jede Zustandsgleichung einzeln (sequentiell) integriert, wodurch die Reihenfolge ihrer Abarbeitung natürlich nicht mehr uninteressant ist und entweder vom Anwender bewusst eingerichtet oder durch entsprechende Sortieralgorithmen hergestellt werden muss.

Bezüglich der Festlegung der Integrationsschritte unterscheiden sich Verfahren mit *konstanter Schrittweite* von solchen mit einer *Schrittweitensteuerung*. Die Schrittweitenproblematik ist sehr komplex und nur im Zusammenhang mit den Eigenschaften des zu simulierenden Systems und den benutzten Integrationsformeln zu diskutieren, wobei neben der Rechenzeit und dem Organisationsaufwand die numerische Stabilität (Diskretisierungs- und Rundungsfehler) von entscheidender Bedeutung ist.

Bezüglich der Abhängigkeit der Inkrementfunktion von den Variablen unterscheidet man schließlich zwischen *expliziten Verfahren* - bei denen die „neuen“ Realisierungen der Zustandsgrößen ausschließlich aus „alten“ Zuständen berechnet werden - und *impliziten Verfahren* - bei denen der Inkrementvektor von den (erst zu berechnenden) neuen Zuständen selbst abhängig ist. Praktisch werden implizierte Verfahren zumeist über einen zwischengeschalteten „Näherungsschritt“ mit sogenannten Prädiktor-Korrektor-Verfahren realisiert.

Neben der globalen Organisation der Integration unterscheiden sich die Lösungsgrundlagen der Simulationssoftware auch hinsichtlich der benutzten Integrationsformeln, welche natürlich wiederum selbst organisatorische Ansprüche an die Steuerung der Integrationszyklen stellen. Bezüglich der Verwendung zurückliegender Funktionswerte können

Einschrittverfahren - welche den neuen Systemzustand lediglich aus dem (um einen Schritt) zurückliegenden Zustand berechnen - von *Mehrschrittverfahren* - welche demgegenüber auch die Verwendung „älterer“ Zustände (Vorgeschichte) ermöglichen bzw. erfordern - unterschieden werden. Obwohl Mehrschrittverfahren in der Regel mit wesentlich weniger Funktionswertberechnungen - also größeren Schrittweiten - arbeiten können, wird dieser Vorteil häufig durch aufwendige Sondermaßnahmen beim Start und bei nichtstetigen Zustandsänderungen (Diskontinuitätsstellen) kompensiert.

Schließlich kann bezüglich der Verwendung von Stützstellen innerhalb eines Schrittes in Verfahren *ohne Stützstellen* und solche *mit Stützstellen* unterteilt werden. Konventionelle Systeme, die ohne Stützstellen arbeiten, sind praktisch nicht bekannt. Die Mehrzahl der popularisierten Systeme benutzt Varianten des Runge-Kutta-Verfahrens ab vierter Ordnung.

Simulationsdefekte

Die klassischen Simulationsdefekte gehören neben den beschriebenen Grundlagen ebenso zur Charakterisierung der digitalen Simulation.

In der Tabelle 2.13 sind diese Defekte zusammengestellt und ihr Problembezug angedeutet.

<i>Defekt</i>	<i>Probleme im Zusammenhang mit ...</i>
Rundungsfehler	... kleinen Schrittweiten
Diskretisierungsfehler	... großen Schrittweiten
Phasen- bzw. Schleifenfehler	... unzureichender Abarbeitungsfolge bei lokaler Integration.
	... Differentialgleichungen höherer Ordnung bei zentralisierter Integration durch stufenweise Rückführung auf ein System 1. Ordnung
Diskontinuitätsstellen	... dem Überschreiten derartiger Stellen bei Mehrschrittverfahren und Schrittweitensteuerung
Steife Systeme	... Teilsystemen mit stark unterschiedlicher Dynamik

Tabelle 2.13 Klassische Simulationsdefekte

Das Zusammenspiel von Rundungs- und Diskretisierungsfehlern ist ein unvermeidliches Grundproblem der praktischen Genauigkeitsbegrenzung numerischer Näherungsverfahren auf Digitalrechnern. Während der *Rundungsfehler* aus der endlichen verarbeitbaren Wortlänge am Digitalrechner folgt, ergibt sich der *Diskretisierungsfehler* aus der diskreten Behandlung der kontinuierlichen Vorgänge. Obwohl diese Problematik mit der Steigerung der Rechengeschwindigkeiten und der Ausdehnung der Wortlängen entschärft wird, können diese Fehler im Zusammenhang mit Phasenfehlern, Diskontinuitätsstellen und steifen Systemen zur Instabilität führen und damit zur Existenzfrage der Simulationslösung werden. *Phasenfehler* (Schleifenfehler) liegen vor, wenn die Realisierungen des Systemzustandes nicht zum gleichen Zeitschritt gehörig sind. Dies kann durch eine unzureichende Abarbeitungsreihenfolge bei der nichtzentralisierten Integration oder bei der zentralisierten Integration durch die

Zurückführung von Differentialgleichungen höherer Ordnung auf ein System erster Ordnung (Schleifen) entstehen.

Das Auftreten von *Diskontinuitätsstellen* im Zustandsverhalten des Simulationsmodells ist für die in diesem Rahmen zu betrachtenden Anwendungen durchaus typisch (sprungförmige Soll- und Störgrößen, Spiele, Schalter, Kennlinien mit „Knick“, Abtast- und Inkrementierglieder usw.). Beim Überschreiten derartiger Stellen sind die Informationen der „Vorgeschichte“ praktisch nicht mehr gültig, da sich das Modell inzwischen verändert hat. Dies kann bei den Mehrschrittverfahren und bei der Schrittweitensteuerung zu Fehlern führen, wenn diese Verfahren Informationen auswerten, die vor der Diskontinuitätsstelle liegen.

Als *steife Systeme* werden Simulationsmodelle bezeichnet, die Teilsysteme mit extremer Frequenzabstimmung enthalten. Dies führt bei gleichen Lösungsgenauigkeiten zu lokal stark unterschiedlichen Anforderungen an die Schrittweite. Während das steife Teilsystem infolge seiner hohen Dynamik sehr kleine Schrittweiten erfordert, bleibt das „träge“ Restsystem quasi in Ruhe. Steife Systeme sind das Resultat der Modellierung und können zumeist relativ einfach vermieden werden, wie Bild 2.310 für mechanische Modelle zeigt.

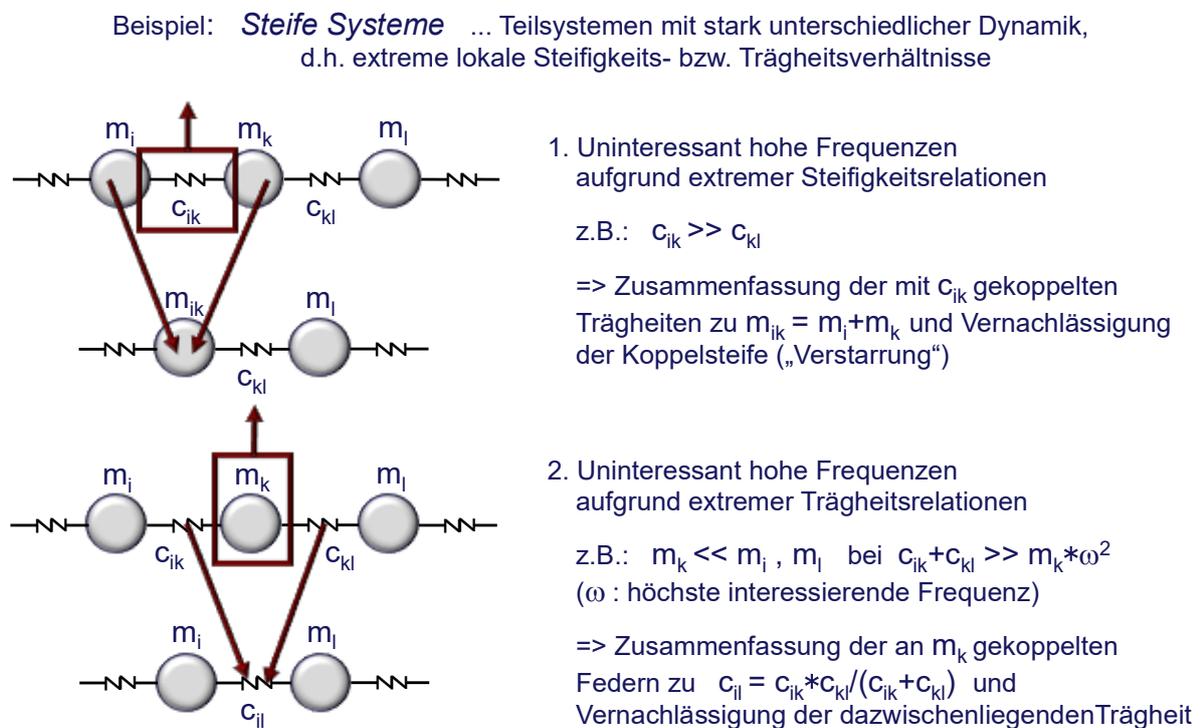


Bild 2.310 Vermeidung „Steifer Systeme“ in mechanischen Modellen

Wenn - wie bei der zentralisierten Integration der Fall - im gesamten System eine gemeinsame Schrittweite benutzt wird, können bei großer Schrittweite im steifen System die Diskretisierungsfehler wachsen oder bei kleinerer Schrittweite im Restsystem die Rundungsfehler steigen, was in dem einen wie in dem anderen Fall zur Instabilität führen kann.

Simultane Schleifen kennzeichnen - wie auch steife Systeme - eine (praktisch wohl recht seltene) Modelleigenschaft und liegen vor, wenn in einem Simulationsmodell als Signalübertragungssystem im Vor- und Rückwärtszweig einer Schleife verzögerungsfreie Signalübertragungen vorliegen und dieser Wirkungskreis damit geschlossen sprungfähig wird. Werden in einer solchen Schleife die Signalabhängigkeiten im Sinne des Einsetzens der Verbindungssignale eliminiert, so verbleibt eine implizite Bestimmungsgleichung, deren Realisie-

rung bei zentraler Integration zu einem unter Umständen stabilitätsbeeinflussenden Phasenfehler führt.

Die - auch unter den Gesichtspunkten der „Defekt-Vorsorge“ entwickelten - unterschiedlichen Verfahrensvarianten der publizierten Simulationssoftware eignen sich im speziellen Anwendungsfall mehr oder weniger zur Vermeidung bzw. Begrenzung der Wirkungen vorgenannter Simulationsdefekte. Ohne im einzelnen darauf eingehen zu können, müssen diesbezügliche Bestrebungen in jedem Falle mit zusätzlichem organisatorischem Aufwand, gesteigerter Kompliziertheit und vor allem mit Flexibilitätsverlust im Verfahrensablauf bezahlt werden. Simulationssysteme, die - in Kenntnis der Defektmöglichkeiten und deren Abhängigkeit von den spezifischen Modelleigenschaften - dem Anwender (vorsichtshalber) eine ganze Palette von Integrationsverfahren (möglichst noch mit einstellbaren Verfahrensparametern) zur Auswahl bieten, verlagern die Schwierigkeiten lediglich auf die Anwendungsebene.

2.2.3.4.10.1 Funktionalismus der objektorientierten Simulation

Eine objektorientierte Modellierung und Beschreibung hat einerseits zum Ziel, möglichst direkt die vom „Original“ physikalisch und gerätetechnisch begründete Struktur im Modell abzubilden und muss andererseits eine lösungsgerecht formalisierbare Beschreibung ermöglichen. Wir benötigen also gewisse Grundregeln, um ein entsprechendes Modellierungskonzept zu konstruieren. Dazu betrachten wir zunächst die charakteristischen zustandsbeschreibenden Beziehungen an den Grundelementen für die einzelnen, in der Systemsimulation interessierenden Anwendungsbereiche, Fachdisziplinen bzw. physikalischen Domänen.

Im Bereich der *Signalverarbeitung* wird üblicherweise das mit einem speziellen Funktional Φ definierte und gerichtete Übertragungsverhalten zwischen den Eingangsgrößen S_E und Ausgangsgrößen S_A für ein SIGNALGLIED beschrieben, Bild 2.311.



Bild 2.311 Objektklasse Signalglied

Für die in der Systemsimulation interessanten physikalischen Bereiche der *Mechanik, Elektrik, Hydraulik, Pneumatik* und *Thermik* sind die wesentlichen Grundelemente und die zugehörigen funktionalen Zusammenhänge in Tabelle 2.14 zusammengestellt. Die Darstellung legt eine der in der Systemtheorie üblichen Analogiebetrachtungen zugrunde und führt zu jeweils formal gleichen funktionalen Beschreibungstypen.

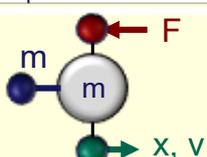
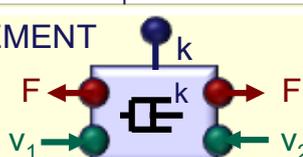
	<i>Mechanik</i>	<i>Elektrik</i>	<i>Hydraulik</i>	<i>Pneumatik</i>	<i>Thermik</i>
<i>Potenzialvariable</i>	Geschwindigkeit \dot{x}	Elektrische Spannung u	Hydraulischer Druck p	Pneumatischer Druck p	Temperatur T
KNOTEN		$u = \frac{1}{C_E} \int \sum_i i_i dt$	$p = \frac{1}{C_P} \int \sum_i \dot{m}_i dt$	$p = \frac{1}{C_H} \int \sum_i Q_i dt$	$T = \frac{1}{C} \int \sum_i P_i dt$
<i>Flussvariable</i>	Kraft F	Elektrischer Strom i	Volumenstrom Q	Massestrom \dot{m}	Wärmestrom P
ELEMENT		$i = \frac{1}{R_E} (u_2 - u_1)$	$\dot{m} = \frac{1}{R_P} f(p_1, p_2)$	$Q = \frac{1}{R_H} f(p_1, p_2)$	$P = L*(T_2 - T_1)$

Tabelle 2.14 Potenzial- und Flussvariable in den physikalischen Domänen

Führen wir nun die Begriffe *Potentialvariable* und *Flussvariable* ein, so können wir damit zwei weitere Modellobjektklassen definieren.

KNOTEN sind Modellobjekte, in denen Flussvariable F summiert und daraus mit einem physikalisch begründeten Lösungsansatz die Potentialvariablen p berechnet werden, Bild 2.312.

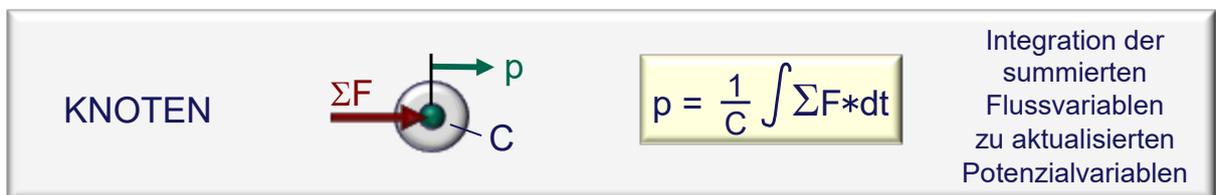


Bild 2.312 Objektklasse Knoten

ELEMENTE sind Modellobjekte, in denen aus den Potentialvariablen p über typspezifische Funktionen Flussvariable F gebildet werden, Bild 2.313.

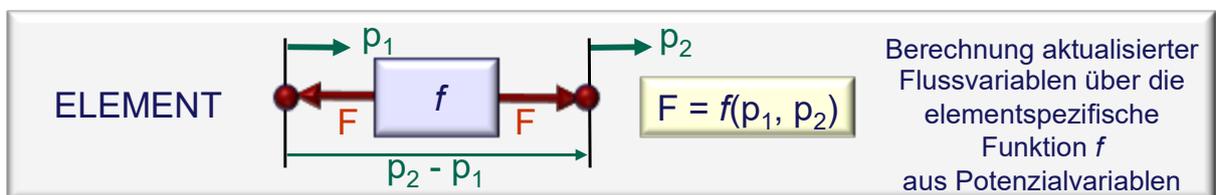


Bild 2.313 Objektklasse Element

Obwohl an unserem Beispiel des Einmassenschwingers nicht ersichtlich, wird bei der praktischen „Modellierungsarbeit“ recht schnell der Wunsch nach einer vierten Objektklasse, nämlich dem TRANSFORMATOR entstehen. Transformatoren wandeln bidirektional Potential- und Flussvariable nach einer Transformationsbeziehung T . Wir können uns darunter beispielsweise im Bereich der Mechanik einen starren Hebel vorstellen, Bild 2.314.

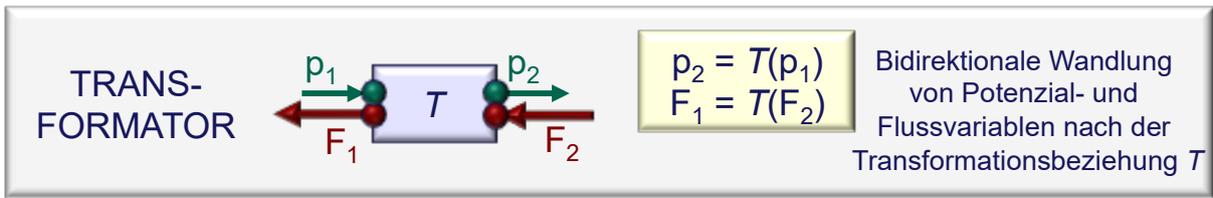


Bild 2.314 Objektklasse Transformator

Lösungsablauf

Das objektklassenorientierte Lösungsverfahren baut unmittelbar auf den Modellobjektklassen auf und nutzt die Vorteile, die sich aus dem konsequenten Umgang mit den Potential- und Flussgrößenvariablen im Rahmen des aktualisierenden Simulationszyklus ergeben. Zur anschaulichen Erläuterung des Vorgehens setzen wir ein Modell mit beliebig vermaschten Kopplungen von Knoten und Elementen voraus. Zuerst erinnern wir uns an das in der Mechanik häufig mit großem Vorteil angewendete *Schnittprinzip*. Wir zerschneiden also alle Objektverbindungen, allerdings nicht ohne dabei die Reaktionen - d.h. in unserem Falle die Schnittkräfte und Bewegungszustände - anzutragen, welche nötig sind, um trotz des Zerschneidens alles im ursprünglichen Zustand zu „halten“. Wir haben danach einzeln „umherliegende“ Massen und Federn, von denen wir im Weiteren je ein Exemplar näher betrachten wollen, Bild 2.315.

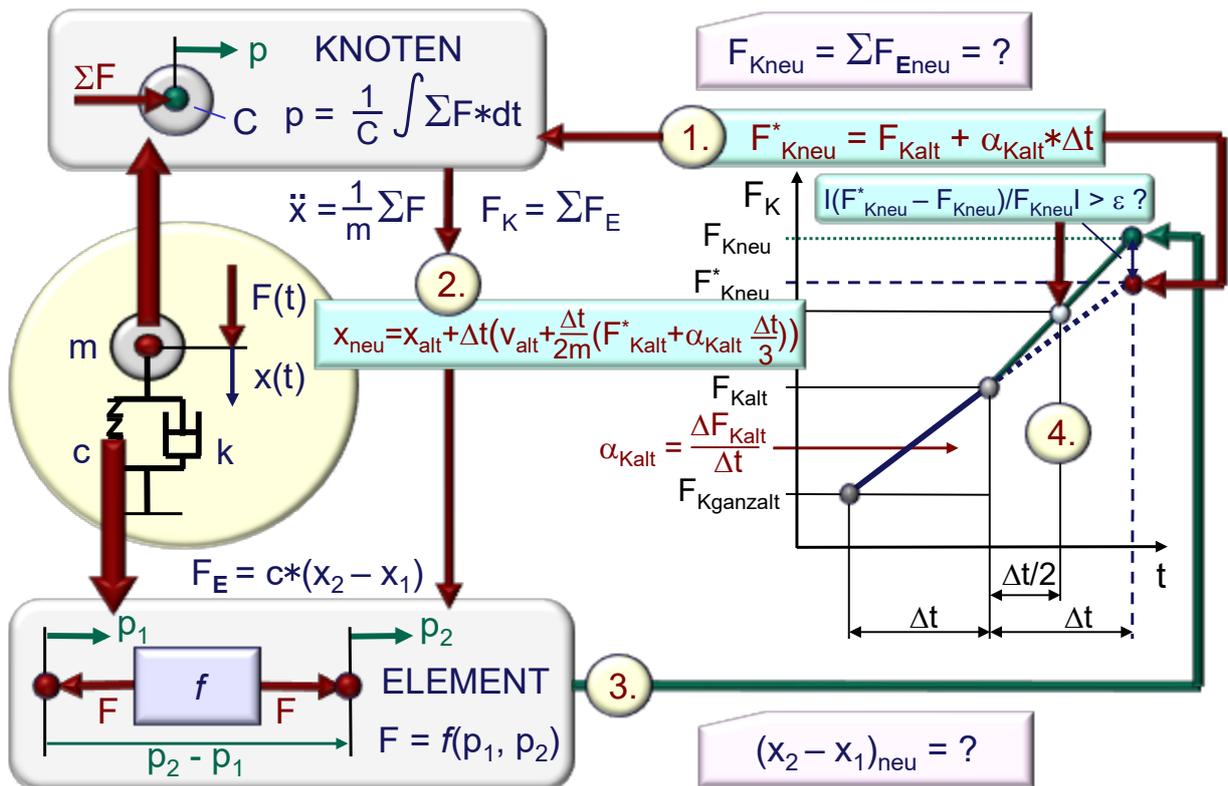


Bild 2.315 Lösungsansatz für Knoten und Elemente

Unsere Masse (Knoten) besitzt den Trägheitsparameter m und ihr interessierender Bewegungszustand ist mit \ddot{x} beschrieben, zudem greifen die Reaktionskräfte der abgeschnittenen Federwirkungen $F_K = \sum F_{Ei}$ an ihr an. Das Kräftegleichgewicht liefert damit $m * \ddot{x} = F_k$. Wir könnten diese Beziehung zur Bestimmung eines - im Sinne eines Zeitschrittes - neuen Bewegungszustandes (Potentialvariable) integrieren, wenn die zugehörige Federkraftsumme

F_K (Flussvariable) bekannt wäre. Betrachten wir also unsere herausgeschnittene Feder (Element). Sie besitzt den Steifigkeitsparameter c und ihre innere Kraftwirkung F_{Ei} infolge der Bewegungsdifferenz $(x_1 - x_2)$. Wir könnten also an der Feder mit der Beziehung $F_{Ei} = c(x_1 - x_2)$ den Kraftanteil (Flussvariable) für den nächsten Zeitschritt berechnen, wenn die zugehörigen Bewegungsgrößen (Potentialvariable) bekannt wären. Wir berechnen also aus neuen Potentialvariablen $p_{(n)}$ in den Elementen neue Flussvariablen $F_{(n)}$. Wir benötigen die $F_{(n)}$ jedoch bereits zuvor, um damit an den Knoten die erforderlichen neuen $p_{(n)}$ zu ermitteln.

Das Dilemma lässt sich lösen, indem wir die für die Auswertung der Knotenbeziehungen benötigten, aber unbekanntes $F_{(n)}$ mit $F_{(n)} = F_{(n)}^*$ schätzen. Die einfachste Schätzung ginge mit $F_{(n)}^* = F_{(a)}$ davon aus, dass die Flussvariablen über dem Zeitschritt unverändert bleiben. Mit diesem Ansatz wird allerdings nur eine Information des letzten Schrittes, nämlich der Wert $F_{(a)}$ genutzt. Verwenden wir zudem den ebenfalls am letzten Schritt vorliegenden Anstieg $\alpha_{(a)}$, so kann die Schätzung mit $F_{(n)}^* = F_{(a)} + \alpha_{(a)} * \Delta t_{(n)}$ als linearer Ansatz wesentlich qualifiziert werden. Der Grad der Ansatzfunktion lässt sich natürlich beliebig erhöhen, je mehr man auf weiter zurückliegende Werte greift. Sicher lässt sich für stetige Verläufe damit die Qualität der Schätzung verbessern. Für die in technischen Problemstellungen durchaus typischen „Sprungstellen“ bietet es sich im Sinne der Verfahrensrobustheit jedoch eher an, über leistungsfähige und dabei dennoch einfache Mechanismen der Schrittweitensteuerung nachzudenken.

Jede Schrittweitensteuerung hat das Ziel, den (zeitlichen) Diskretisierungsfehler unterhalb eines vorgegebenen Maßes zu begrenzen. Dazu nutzen wir die Kenntnis des Schätzwertes $F_{(n)}$ und bilden nach jedem (versuchten) Schritt die relative Abweichung $(F_{(n)} - F_{(n)}^*)/F_0$ als begründetes Maß für den Fehler. Ist diese Abweichung kleiner als ein vorgegebener zulässiger Wert, dann wird die Schrittausführung bestätigt, andernfalls wird ein neuer Schritt mit der halben Weite versucht, wobei die erneute Schätzung mit dem zwischenzeitlich verbesserten Anstieg erfolgt. Blicke noch zu erwähnen, dass die Schrittweite im Falle „deutlicher“ Unterschreitung der zulässigen Abweichung durch den Schätzfehler verdoppelt wird und dass es für die möglichen Schrittweitereinstellungen natürlich eine obere und eine untere Schranke gibt. Die obere Grenze folgt aus der gewünschten Auflösung der Ergebnisdarstellung, und die untere Begrenzung liefert die Numerik.

Bevor wir den gesamten objektorientierten Abarbeitungszyklus darstellen können, erinnern wir uns daran, dass wir neben Knoten und Elementen eine weitere Klasse, nämlich das Objekt „Signalglied“ in den Lösungsablauf einbeziehen müssen. Während bei den Knoten und Elementen innerhalb des Klassentypes und je Zeitschritt die Aktualisierungsreihenfolge beliebig ist, spielt aufgrund des gerichteten Charakters eines Signalgliedes die Aktualisierungsfolge in einer Signalstruktur eine entscheidende Rolle. Hier müssen also strukturanalysierende Sortieralgorithmen dafür sorgen, dass die in der gesamten Signalstruktur abarbeitungsbedingt - z.B. bei rückführenden Schleifen - maximal auftretende Aktualisierungszeitdifferenz ein Minimum wird.

Die Vorstellung des objektorientierten Lösungsablaufes bliebe unvollständig ohne einige Bemerkungen zum sogenannten Variablenkonzept. Es geht dabei nicht um die bereits erläuterten Potential- und Flussvariablen als zustandsbeschreibende Größen, sondern um die

flexiblen Möglichkeiten zur Formulierung funktioneller Abhängigkeiten, insbesondere auch im Zusammenhang mit der erforderlichen Parametrierung der Modellobjekte.

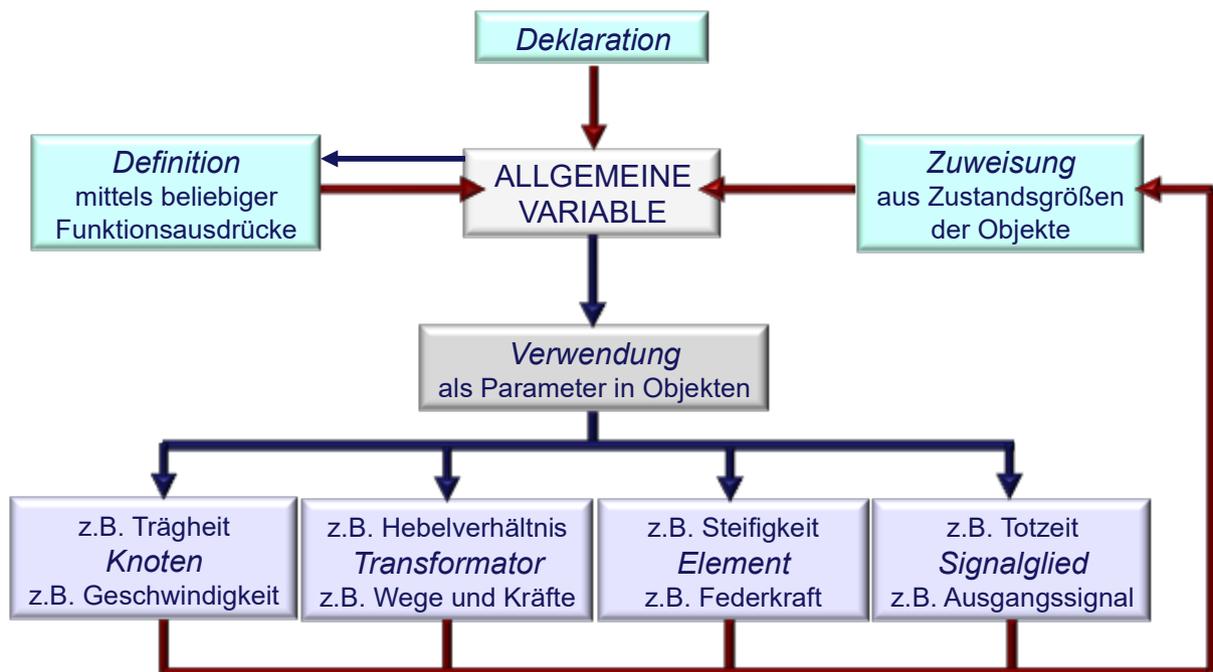


Bild 2.316 Konzept zur Realisierung flexibel variabler Parameter

Die schematische Darstellung in Bild 2.316 zeigt Möglichkeiten der Erzeugung und Verwendung von Variablen. Sie werden über die Spezifikation mit einem Namen und bei Bedarf mit einer Bildungsvorschrift (Funktion) definiert und in einer Variablenliste verwaltet. Da Variablen hierarchisch mit bereits definierten Variablen gebildet werden können, steht damit ein Mechanismus zum Aufbau eines beliebig verknüpften funktionellen Abhängigkeitsgeflechtes zur Verfügung. Über die Möglichkeiten zur Erfassung und Protokollierung von Zustandsgrößen des Modells können ebenfalls Variablen belegt und dadurch unbeschränkt zur funktionellen Verknüpfung verwendet werden. Mit den derart freizügig formulierbaren Abhängigkeiten können entweder direkt zustandsbeschreibende Funktionsergebnisse gewonnen oder aber die Parameter der Modellobjekte als funktionell abhängige Ausdrücke formuliert werden.

Nachdem nunmehr die einzelnen Bestandteile des objektorientierten Lösungsverfahrens charakterisiert sind, wollen wir folgend die kennzeichnenden Schwerpunkte zusammenfassen und den eigentlichen Lösungszyklus veranschaulichen:

1. *Diskretisierung der Struktur in Knoten, Elemente und Transformatoren.*
Knoten sind Modellobjekte, in denen die Flussgrößen summiert und daraus mit einem physikalisch begründeten Lösungsansatz die Potentialgrößen berechnet werden. Elemente sind Modellobjekte, in denen aus den Potentialgrößen über typspezifische Funktionen Flussgrößen gebildet werden.
2. *Reihenfolgegerechte Notation von Signalverarbeitungsstrukturen mit Signalgliedern.*
Signalglieder besitzen ein gerichtetes Ein- / Ausgangssignalübertragungsverhalten und werden in der realen Abarbeitungsfolge zur Beschreibung der Signalverarbeitungsstruktur benutzt.
3. *Parameterspezifikation unter Nutzung des globalen Variablenkonzeptes.*

Alle Objektparameter können neben Wertzuordnungen über beliebige, auch geschachtelte, Funktionsausdrücke definiert werden. In den Ausdrücken sind über Variable uneingeschränkt Systemzustandsgrößen oder externes Datenmaterial, wie z.B. experimentelle Abhängigkeiten, verwendbar.

4. *Zyklische Aktualisierung der Variablen, Signal-, Potential- und Flussgrößen.*
Je Rechenzeitschritt werden alle Größen nach dem im Schema von Bild 2.317 zum Lösungszyklus dargestellten Ablauf aktualisiert. Dabei ist innerhalb der Objektklassen Knoten und Elemente jeweils parallele Abarbeitung zugelassen.
5. *Verbindung von Ansatzfunktion und Genauigkeitskriterium zur Schrittweitensteuerung.*

Mit einem geeigneten Ansatz wird eine Ergebnisschätzung ausgeführt, die gleichzeitig die Formulierung eines Fehlerkriteriums ermöglicht. Das ergibt die Grundlage für eine genauigkeitsgesteuerte Zeitschrittweite.

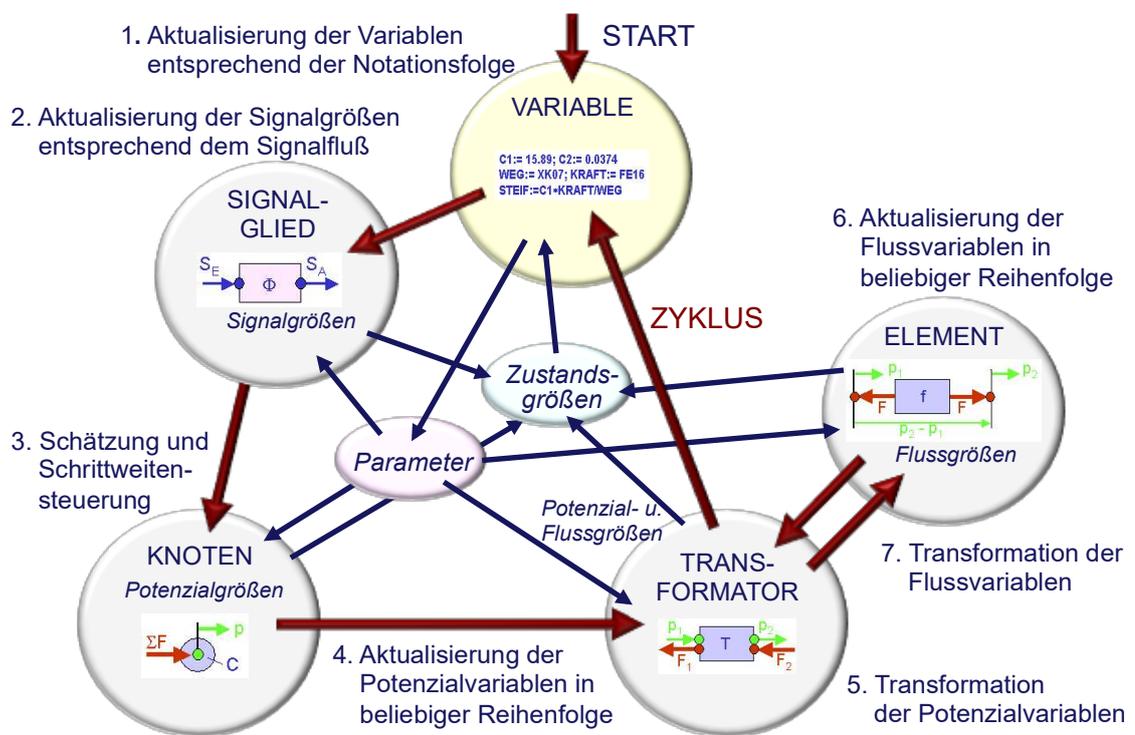


Bild 2.317 Lösungszyklus der objektorientierten Simulation

2.2.3.4.10.2 Beispiele für Knoten, Elemente und Transformatoren

Im Folgenden sollen einige Beispiele für die Algorithmen und Parameter von Knoten, Elementen und Transformatoren angeführt werden, um so die Konstruktion dieser Objekte zu veranschaulichen.

Knoten

An Knoten werden aus Flussgrößen neue Potenzialgrößen bestimmt.

Das Vorgehen an *mechanischen Knoten* (konzentrierte Trägheiten) zeigt Bild 2.318.

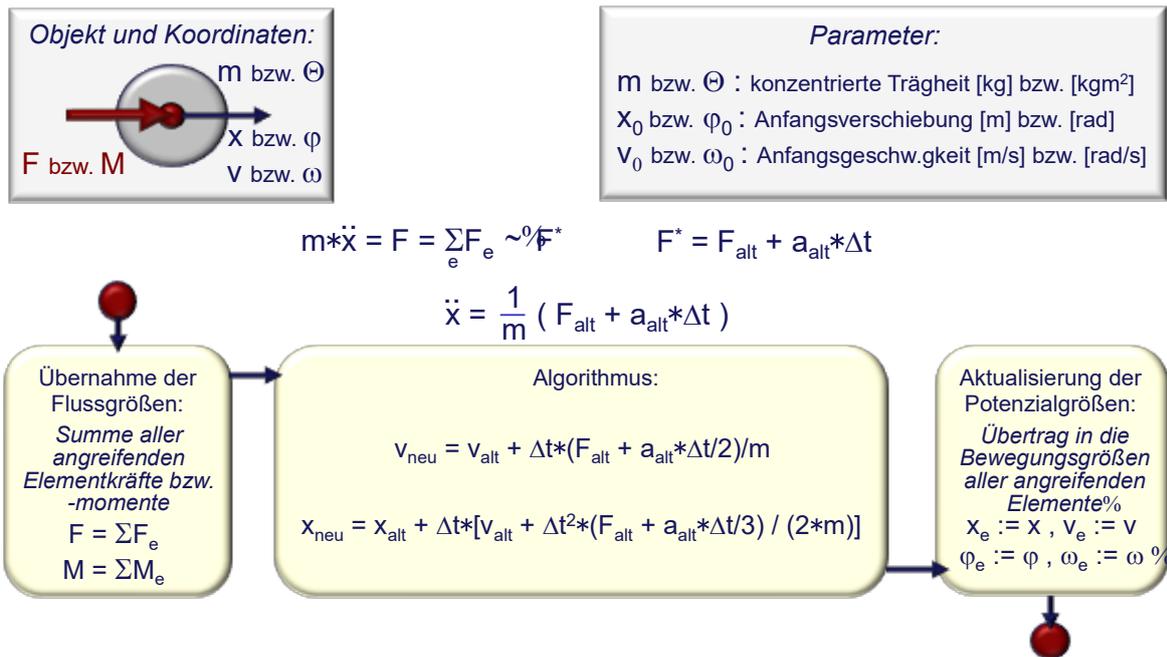


Bild 2.318 Knoten-Beschreibung für die konzentrierte Trägheit

Die Möglichkeit zur Berücksichtigung beliebig großer linearer dynamischer Teilstrukturen ist mit dem *modalen Ersatzsystem* gegeben. Das modale Ersatzsystem ist vom Objekttyp Knoten und das Vorgehen ist in Bild 2.319 beschrieben. Die algorithmischen Grundlagen sind in Abschnitt 2.2.3.4.7 notiert.

In Bild 2.320 sind einige Parametrierungsvarianten für den *thermischen Knoten* (Kapazität) angegeben.

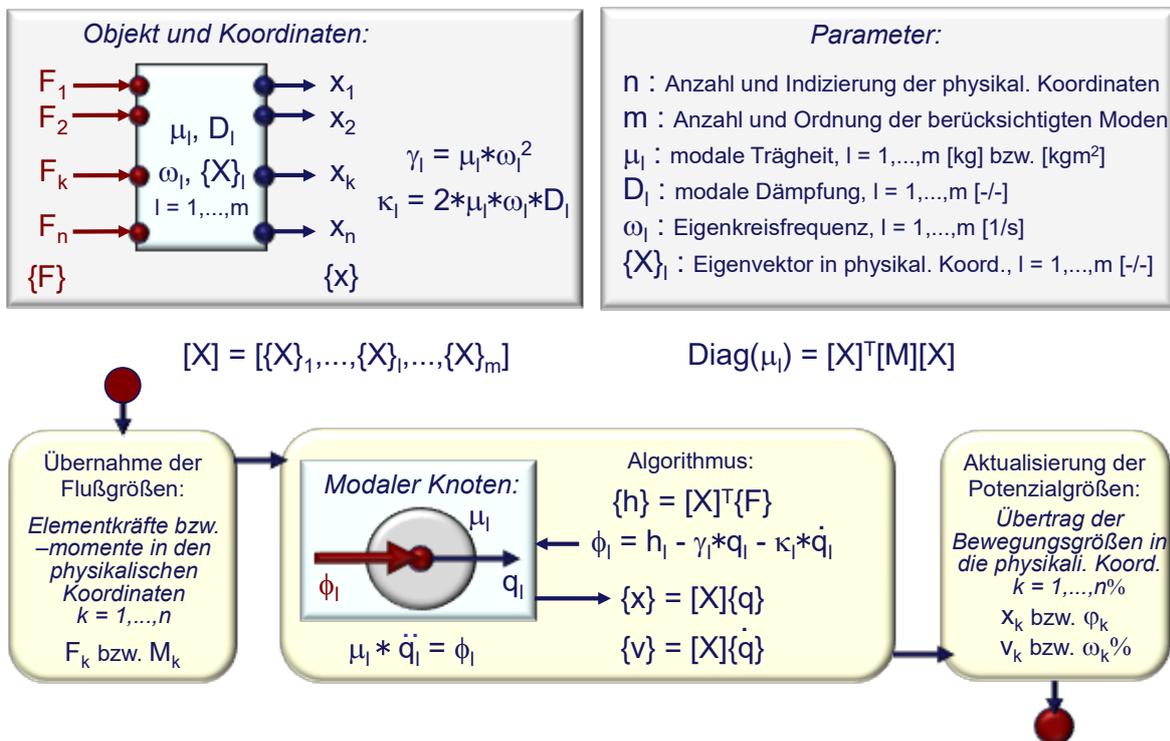


Bild 2.319 Knoten-Beschreibung für das Modale Ersatzsystem

$$C = c_p \cdot \rho \cdot V \quad \text{bzw.} \quad C = c_p \cdot m$$

Vorgabe von Masse und Werkstoff

Thermischer Knoten - K1

Parameter:
Berechnen mit: Wärmekapazität
 Datenbank verwenden

Wärmekapazität: 0 J/K

Anfangswerte:
Anfangstemperatur: 20 °C

Ergebnisgrößen:
Temperatur: °C
Temperaturgradient: K/s
Wärmestrom: W
Wärmemenge: J

Direkte Vorgabe der Kapazität

Thermischer Knoten - K1

Parameter:
Berechnen mit: Volumen
 Datenbank verwenden

Werkstoff: St 38
Volumen: 0.1 m³
spez. Wärmekapazität: 507 J/(kg·K)
Dichte: 7850 kg/m³

Anfangswerte:
Anfangstemperatur: 20 °C

Ergebnisgrößen:
Temperatur: °C
Temperaturgradient: K/s
Wärmestrom: W
Wärmemenge: J

Vorgabe von Volumen und Werkstoff

Thermischer Knoten - K1

Parameter:
Berechnen mit: Masse
 Datenbank verwenden

Werkstoff: St 38
Masse: 1 kg
spez. Wärmekapazität: 507 J/(kg·K)

Anfangswerte:
Anfangstemperatur: 20 °C

Ergebnisgrößen:
Temperatur: °C
Temperaturgradient: K/s
Wärmestrom: W
Wärmemenge: J

Vorgabe der Temperatur für den kapazitätslosen Knoten

kapazitätsloser Knoten - K2

Anfangswerte:
Anfangstemperatur: 20 °C

Ergebnisgrößen:
Temperatur: °C
Temperaturgradient: K/s

Bild 2.320 Parametrierungsvarianten des thermischen Knoten

Elemente

In Elementen werden aus Potenzialdifferenzen neue Flussgrößen generiert. Das mechanische Element des *Feder-Dämpfer-Lose-Wandler* vereinigt die Eigenschaften der Elastizität (Feder), viskosen Dämpfung, des Spiels (Lose) und der Hebelwirkung (Wandler) in einem allgemeinen Element.

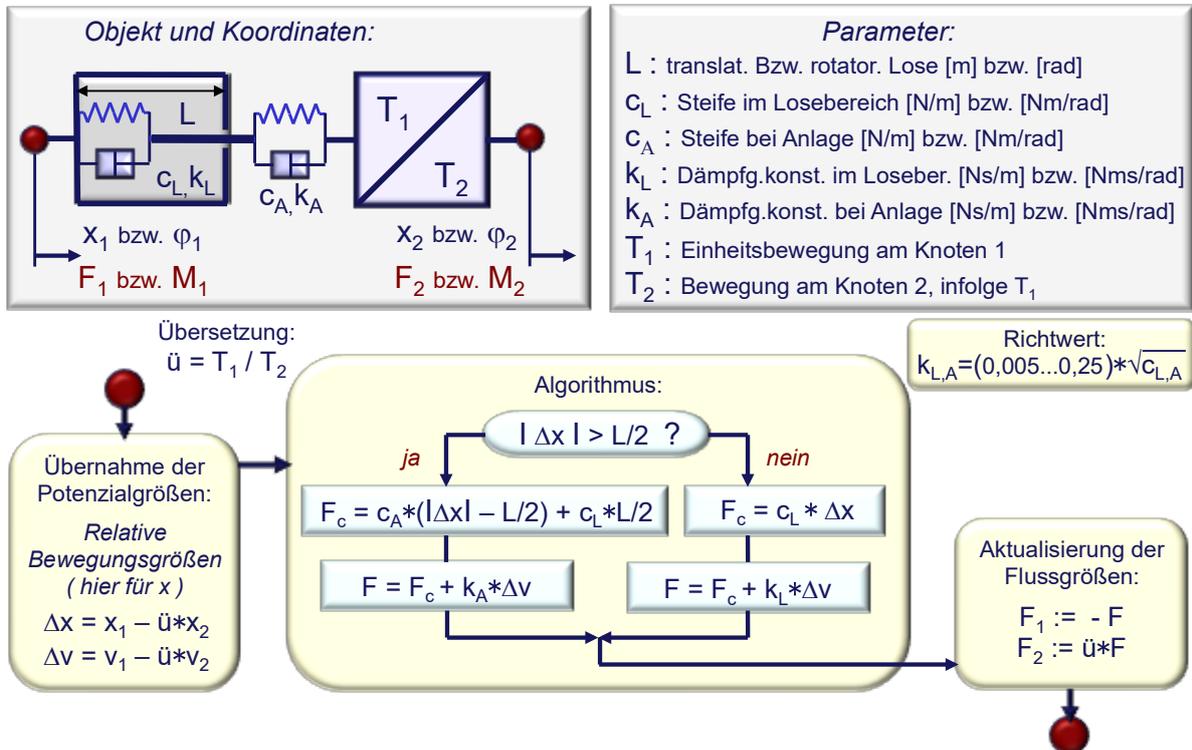


Bild 2.321 Element-Beschreibung für allgemeinen Feder-Dämpfer-Lose-Wandler

Über die Parameter können die verschiedenen Eigenschaften gesteuert werden. Modellstruktur, Parameter und Algorithmus des Elementes sind in Bild 2.321 gezeigt.

Die modellseitige Aufbereitung des komplexen Elementes der *Mutter-Spindel-Paarung* vom Kugelgewindetrieb ist in Bild 2.322 demonstriert. Auch in diesem Element ist bei Bedarf ein Spiel parametrierbar.

Bild 2.323 zeigt die Vorgehensweise zur allgemeinen Formulierung der Elemente zur Beschreibung hydraulischer Widerstände.

In Bild 2.324 ist der Algorithmus für ein Druckbegrenzungsventil beschrieben.

Die Element-Beschreibung für den einfach wirkenden Hydraulikzylinder (hydraulisch-mechanischer Wandler) findet sich in Bild 2.325 zu finden.

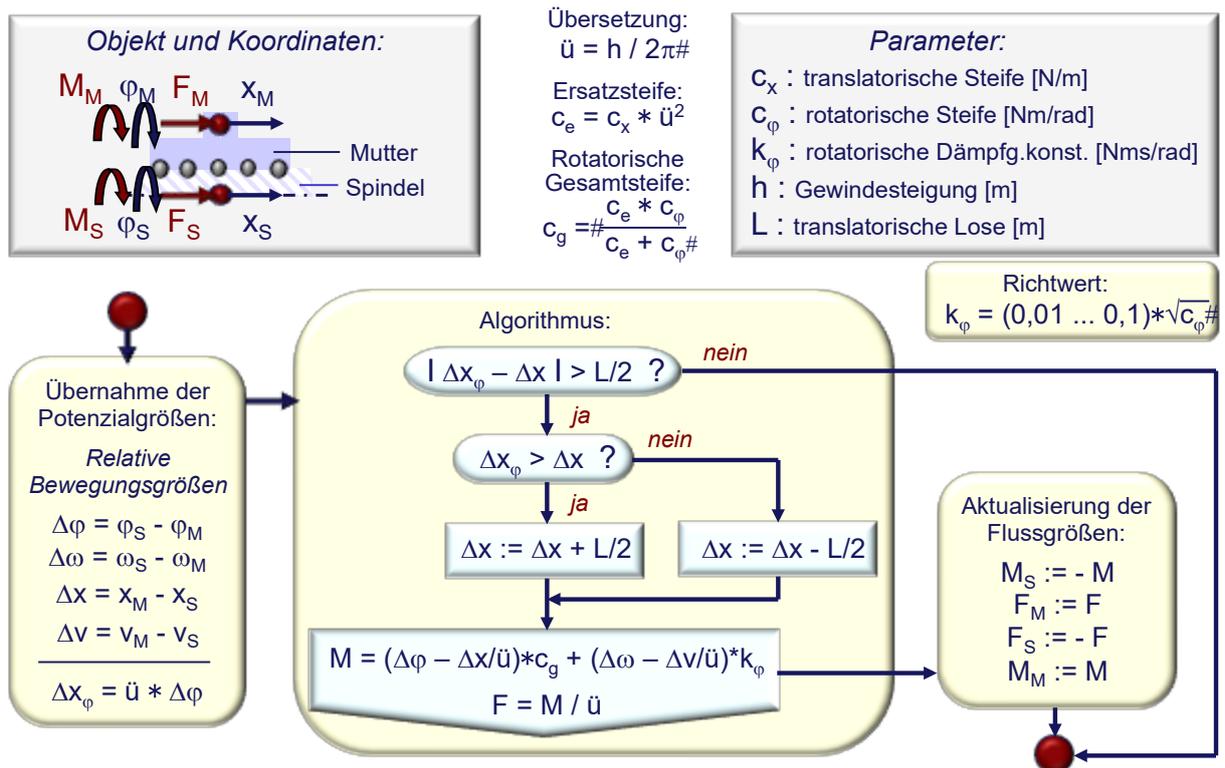
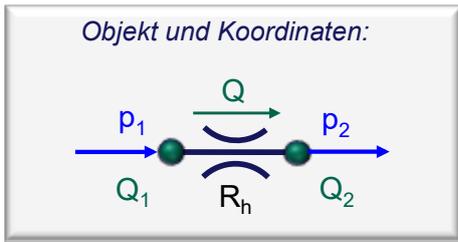


Bild 2.322 Element-Beschreibung für den Kugel-Gewindetrieb



Durchfluss:

$$Q = \frac{1}{R_h} * f(\Delta p)$$

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

$$Q = Q_1 = Q_2$$

Parameter:
 R_h : hydraulischer Widerstand [Pa*s/m³]

z.B.: kreisförmige Düse
 (Kapillardrossel, Bohrung)

$$Q = \frac{\pi d^4}{128 l} * \frac{1}{\nu * \rho} * \Delta p$$

$\frac{1}{R_h}$
 \swarrow \searrow
 $L_{\text{Geometrie}}$ L_{Fluid}

d : Bohrungsdurchmesser [m]
 l : Bohrungslänge [m]
 ν : kinematische Viskosität [m²/s]

ρ : Dichte [kg/m³]

z.B.: Blende

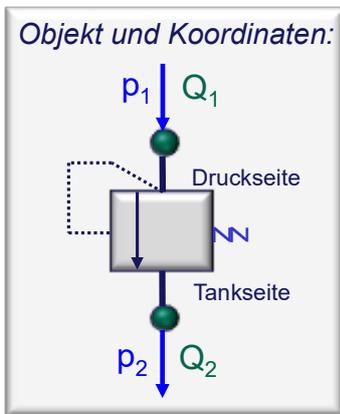
$$Q = \frac{\pi d_h^2}{\sqrt{8 \zeta \rho}} * \sqrt{\Delta p}$$

d_h : hydraulischer Blendendurchmesser [m]
 ζ : Widerstandsbeiwert [-/-]

Allgemein für Spalte
 (Ringspalt, ebener Spalt)

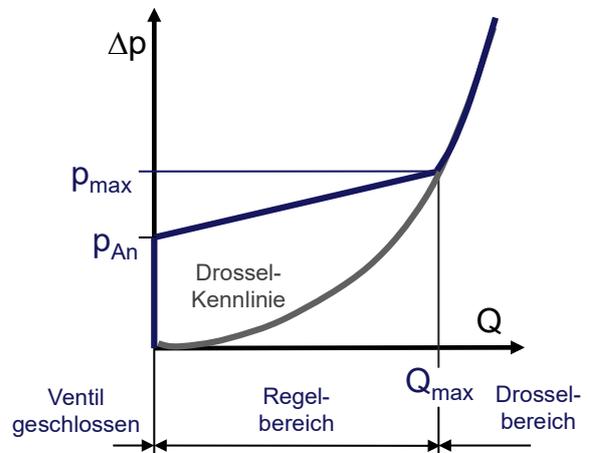
$$Q = L_{\text{Geometrie}} * L_{\text{Fluid}} * \Delta p$$

Bild 2.323 Element-Beschreibung für hydraulische Widerstände



$$\Delta p = p_1 - p_2$$

$$Q = Q_1 = Q_2$$



Parameter:

p_{An} : Ansprech(Einstell-)druck [Pa]
 p_{max} : Maximaldruck im Regelbereich [Pa]
 Q_{max} : Maximalstrom im Regelbereich [m³/s]
 R_h : hydraulischer Widerstand [Pa*s/m³]

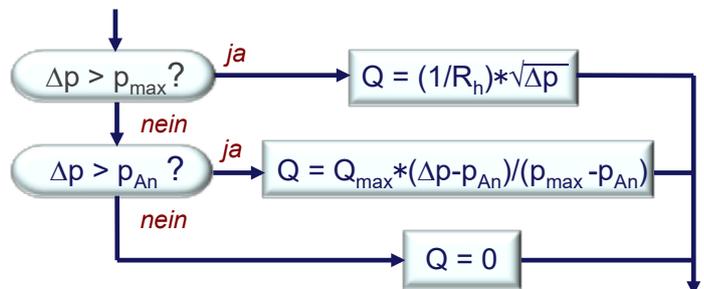


Bild 2.324 Element-Beschreibung für (statisches) Druckbegrenzungsventil

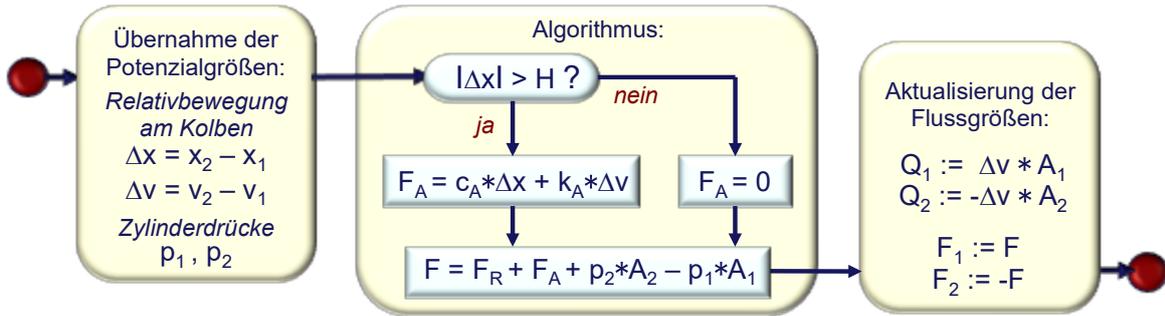
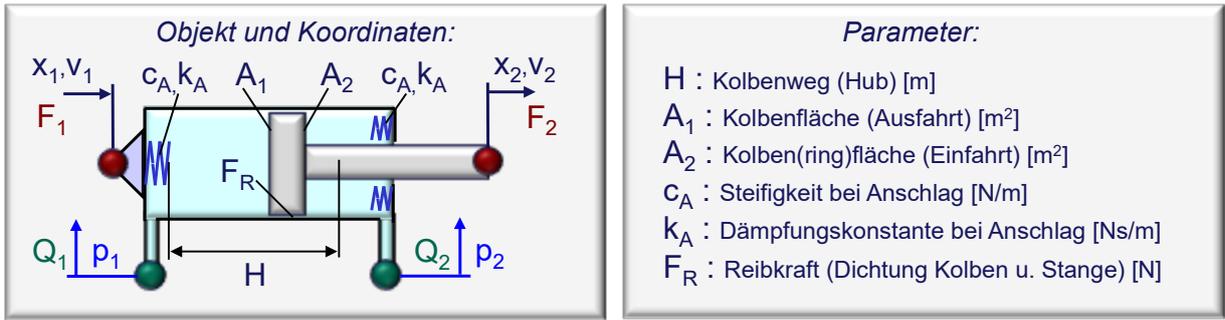


Bild 2.325 Element-Beschreibung für einfach wirkenden Hydraulizylinder (hydraulisch-mechanischer Wandler)

Mit Bild 2.326 (Wärmeleitung) und Bild 2.327 (Konvektion) sind Parametrierungsvarianten für *thermische Elemente* gezeigt.

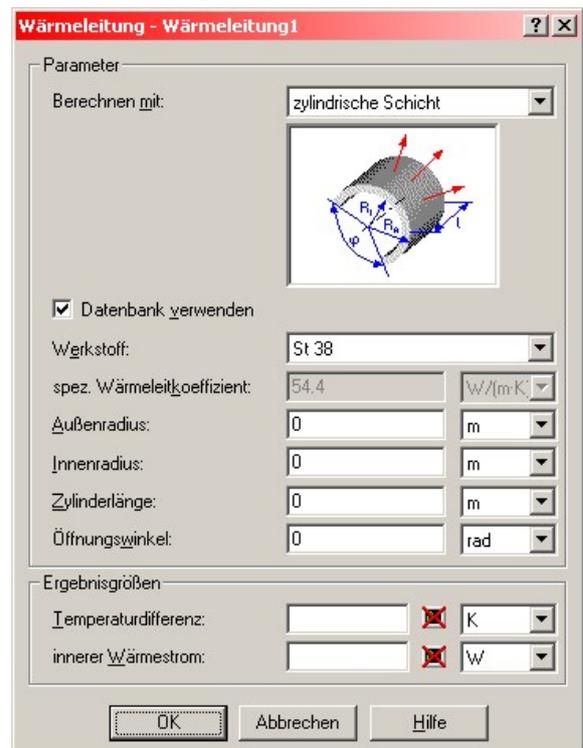
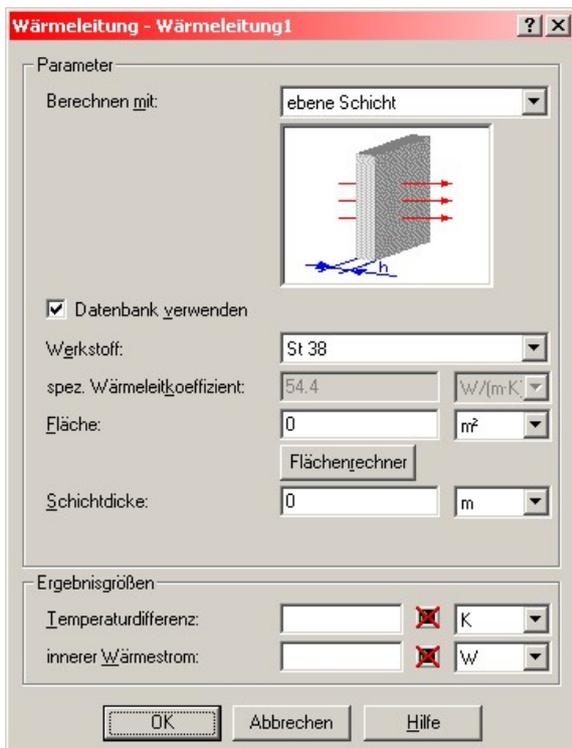


Bild 2.326 Parametrierung von Elementen zur Wärmeleitung

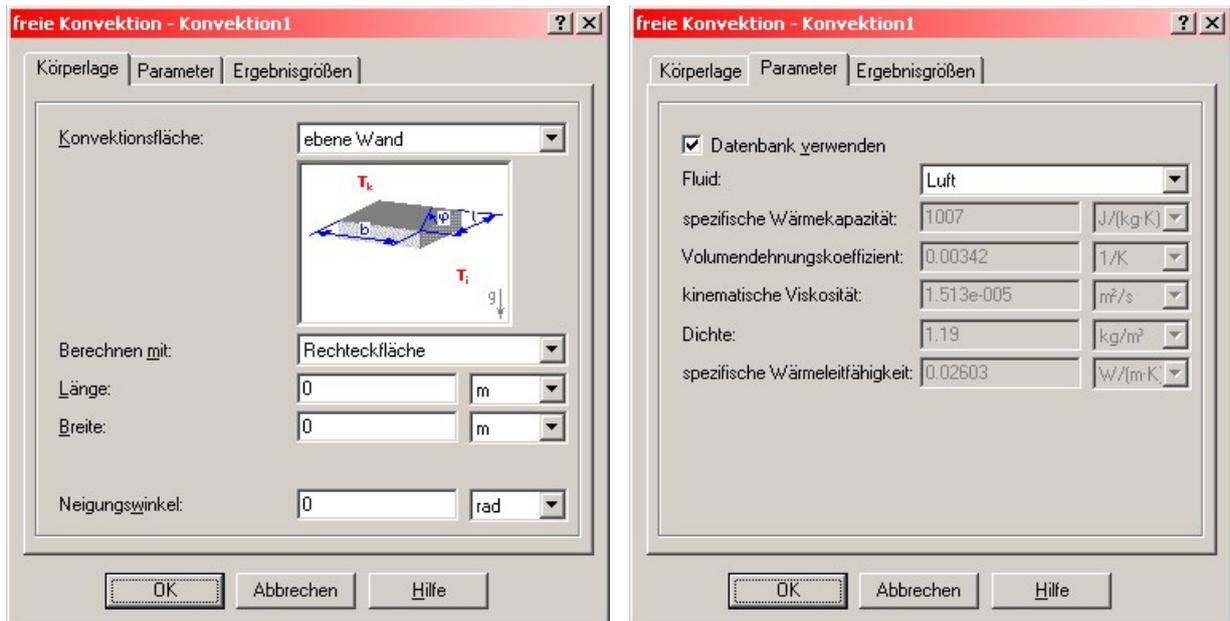


Bild 2.327 Parametrierung von Elementen zur Konvektion

Transformator

An Knoten müssen im Rahmen der Modellierung Elemente angeschlossen und die Koordinaten der Elemente mit Knoten verbunden werden. Diese Regel stellt praktisch keine Einschränkung dar, da Knoten-Knoten-Verbindungen „verschmolzen“ z.B.:

$$m_{ers} = m_i + m_{i+1}$$

und Element-Element-Verbindungen zusammengefasst z.B.:

$$1/c_{ers} = 1/c_i + 1/c_{i+1}$$

werden können.

Die Transformatoren – hier in Bild 2.328 am Beispiel des Hebels – übersetzen in der einen Richtung die Potenzialgrößen vom Knoten zum Element und in der anderen Richtung die Flussgrößen vom Element zum Knoten. So haben sie am einen Ende einen Knoten und am anderen Ende ein Element.

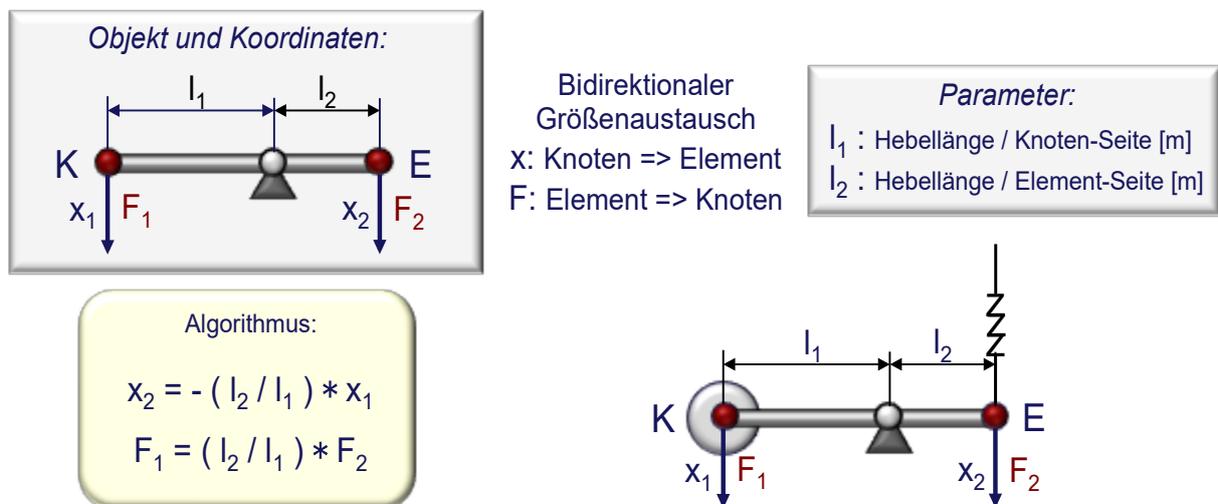


Bild 2.328 Transformator-Beschreibung für den Hebel als translatorische Übersetzung

2.2.3.4.10.3 Strukturveränderlichkeit

In Abschnitt 2.2.3.4.6 haben wir für die positionsabhängige Realisierung der Wärmestromeinleitung und -übertragung in der thermischen Modellierung den Funktionalismus für die Strukturveränderlichkeit schon kennengelernt. Bild 2.329 ist der gleiche Modellierungsansatz für die positionsabhängige Dynamik der Stabachse eines Hexapoden gezeigt.

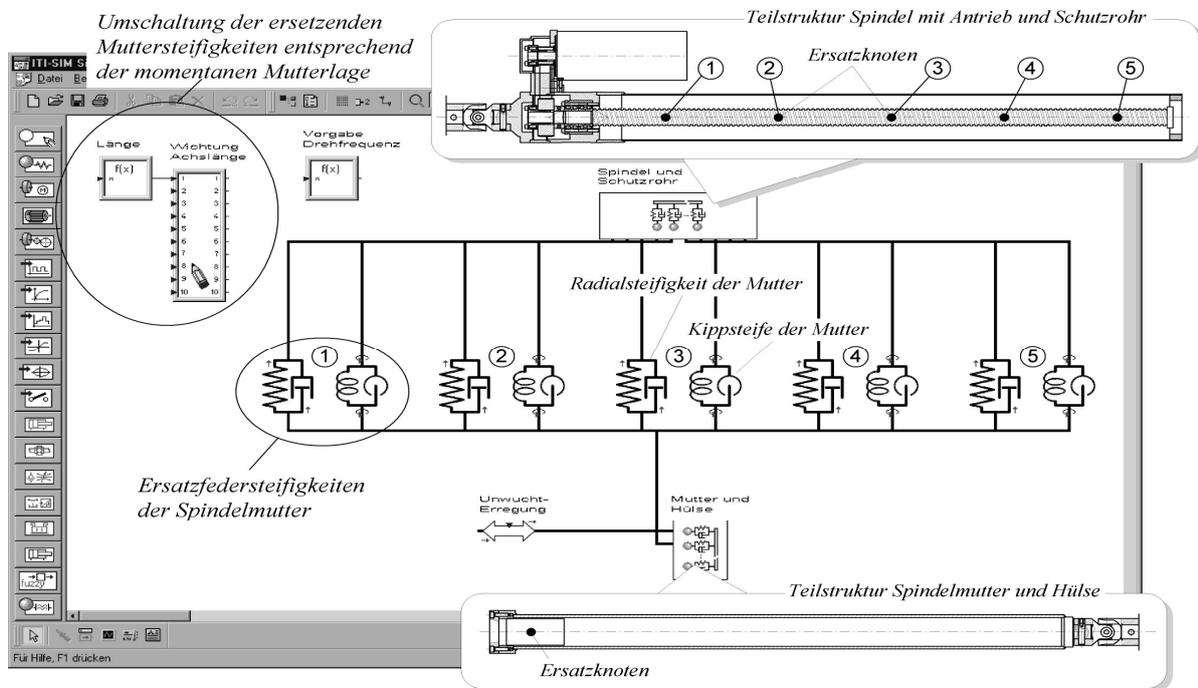


Bild 2.329 Positionsabhängige Modellstruktur der Stabachse unter ITI-SIM

2.2.3.4.10.4 Möglichkeiten und Beispiele für die Systemsimulation

Die folgenden Betrachtungen sollen, aufbauend auf der bisher in ihrem Grundcharakter gekennzeichneten Simulation und unter dem konzentrierten Blick auf die Ganzheitlichkeit der Systembehandlung, gewissermaßen zusammenfassend, einerseits die zwingende Notwendigkeit – Bild 2.330 – und andererseits die Möglichkeiten und Voraussetzungen für eine Systemsimulation behandeln.

Die in vielen - insbesondere den innovativen - technischen Systemen vorliegenden nichtlinearen Parameter- und Zustandsabhängigkeiten sowie die Existenz vermaschter und rückgekoppelter Strukturen begründen den Simulationsbedarf vom Charakter der Mixed-Model-Systemsimulation. Die sich gegenseitig beeinflussende Dynamik, beispielsweise mechanischer, antriebs- und regelungstechnischer, signalverarbeitender, mikrosystemtechnischer oder hydraulischer und pneumatischer Systembestandteile führt zu einem Komplexitätsgrad, der die Analyse und Bewertung des Gesamtsystems zwingend erfordert, Bild 2.331. Damit sind neue Ansprüche verbunden, denen sich heute die Entwicklungsingenieure mit ihren Arbeitsweisen ebenso stellen müssen wie die Anbieter von Simulationssoftware.

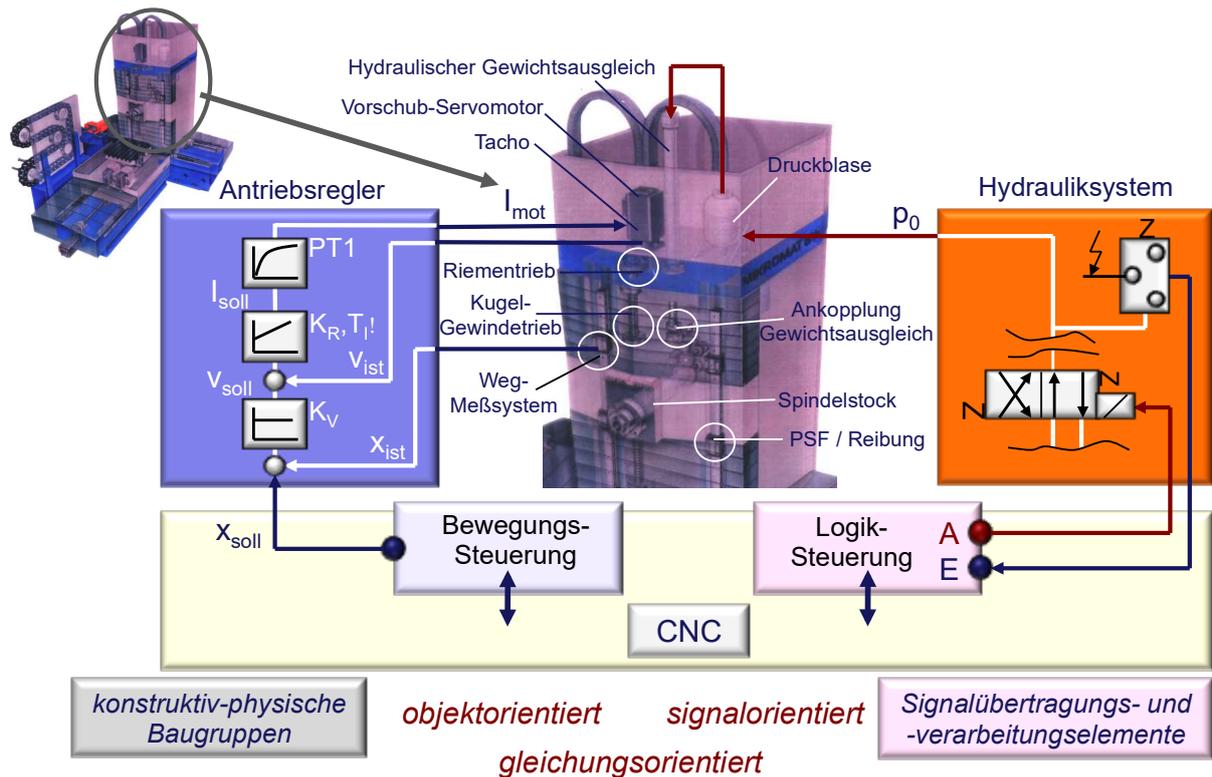


Bild 2.330 Anspruch zur Systemsimulation an Werkzeugmaschinen

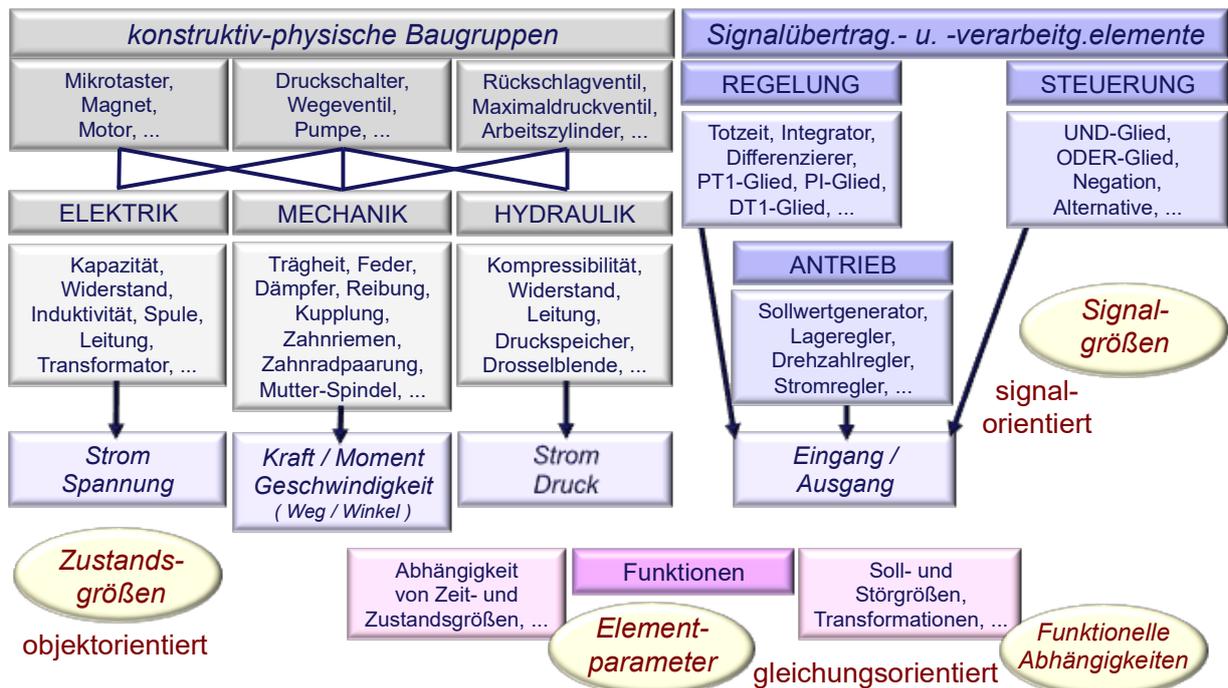


Bild 2.331 Modellobjekte und physikalische Domänen der Systemsimulation an WZM

Vom Spezialproblem zur Kooperation der Disziplinen zu gelangen stellt für die erfolgreiche Bearbeitung derartiger Systemlösungen eine der Grundvoraussetzungen dar. Mit der wachsenden Verbreitung und Leistungsfähigkeit der Rechentechnik wurden in den Fachgebieten der Mechanik, Antriebs- und Regelungstechnik, Elektrik und Elektronik, aber auch der Hydraulik leistungsfähige Berechnungs- und Simulationswerkzeuge entwickelt. Die kommerziell

verfügbaren Spezialsimulatoren decken im Wesentlichen die Breite der einzelnen Disziplinen ab und nutzen fachgebietsspezifische Beschreibungs- und Lösungsmöglichkeiten.

Blockorientierte Signalflussbeschreibungen (z. B. [SLNK], [MATR], [VSIM], [ITIS]) haben ihren Ursprung in der Regelungstechnik. Für die Simulation in der Elektrotechnik/Elektronik (z. B. [ITIS], [PSPC], [SABR], [ELDO]) und Hydraulik (z. B. [ITIS], [MOSI], [FLOW], [DSHP]) werden bauelemente- und geräteorientierte Schaltpläne zugrundegelegt. In der Antriebs-, Getriebe- und Fahrzeugtechnik (z. B. [ITIS], [DRES], [SIMP], [ARLA]) werden Modelle aufgestellt, die sich auf Baugruppen und Funktionselemente beziehen. Schließlich arbeiten die Mehrkörpersysteme (z. B. [ITIS], [ADAM], [DADS], [NUST]) mit geometrisch-funktionell orientierten Körper-Gelenk-Beschreibungen für die Kinematik.

Für die uns im Zusammenhang mit der Werkzeugmaschinenentwicklung interessierenden technischen Systeme existieren physikalisch bedingte Modellwelten sowie für deren Analyse typische Simulationswerkzeuge.

In der *Mechanik* sind dies:

- linear-elastische Stützstrukturen, wie z. B. Maschinengestelle, deren Schwingungsverhalten modalanalytisch mit z.T. sehr großen Finite-Elemente-Modellen (FEM) berechnet wird,
- nichtlinear-kinematische Systeme, wie z. B. Gelenkroboter, deren Kinematik und Dynamik über die Mehrkörpersystem-Beschreibung (MKS) simuliert werden kann, sowie
- aus diversen mechanischen Übertragungselementen, wie z. B. Riemen- und Zahnradgetrieben, Kupplungen, Zahnstangen-, Schnecken-, Gewinde- oder Kurbeltrieben, zusammengesetzte Antriebsstrukturen, deren dynamisches Verhalten über MKS oder durch die Berechnung bzw. Simulation an Modellen mit konzentrierten Elementen (KEM) ermittelt wird.
- Im Falle geregelter elektromotorischer Antriebskomponenten liegen diese Systeme bereits unteilbar in den Bereichen von Mechanik, Elektrik und Signalverarbeitung.

In den Bereich der *Elektrik* fallen:

- elektrische und magnetische Feldprobleme, die mit entsprechenden FEM-Systemen beschrieben und analysiert werden, sowie
- elektrische Netzwerke, welche mit linearen oder nichtlinearen Eigenschaften als KEM behandelt oder in blockorientierten Simulatoren (BLOR) abgebildet und gelöst werden können.
- Die Signalverarbeitung umfasst konventionelle analoge und digitale Reglerstrukturen, deren Analyse mit BLOR-Systemen erfolgt, wobei rein digitale Regler zunehmend PC-gestützt mit entsprechenden Software- Entwicklungssystemen (SES) definiert und simuliert werden, was in vollem Umfang für FUZZY-Regler gilt.

In der *Hydraulik und Pneumatik* sind:

- geräteorientierte Schaltpläne die übliche Entwurfgrundlage, welche weitestgehend von den Modelldarstellungen der KEM- und BLOR-Simulatoren unterstützt wird.

Die bekannten Spezialsimulatoren (FEM, MKS, KEM, BLOR, SES) nutzen jeweils eine Modellbeschreibung, die eng an das jeweilige Fachgebiet gebunden ist. Außerdem kann man für die Lösungsverfahren das jeweils typische Systemverhalten der Branche voraussetzen, wovon man sich i. a. Vereinfachungen erhofft. Natürlich ist, unabhängig vom Vermögen jeder

Software, sowohl für die problemgerechte Modellierung als auch für die sachgemäße Interpretation und Bewertung der Ergebnisse die Erfahrung des Spezialisten der entsprechenden Disziplin erforderlich. Vor dem Hintergrund komplexer werdender Systeme und dem Zwang zu ganzheitlicher Verhaltensbewertung besteht der dringende Bedarf an einer Software-Unterstützung der erforderlichen Kooperation zwischen den verschiedenartigen Disziplinen. Dieser Bedarf erstreckt sich sowohl auf die Akzeptanz bereits etablierter Arbeitsweisen und Abläufe hinsichtlich sinnvoller Spezialisierung und Arbeitsteilung als auch auf die Schaffung kooperativer Strukturen, die ganzheitliches Denken, gegenseitiges Verstehen und damit die Wahrnehmung der Systemverantwortung ermöglichen.

Die Konzepte und Probleme der Systemsimulation sollen folgend etwas eingehender betrachtet werden. Die berechtigte Freude über die teilweise recht anwenderfreundliche Gestaltung der einzelnen Spezialsimulatoren wird zunehmend durch die Konsequenzen getrübt, die sich aus der Erkenntnis ergeben, dass die jeweilige Spezialdisziplin in der Regel eben nur einen Teil des Systems abbildet. Zur Behandlung der im Gesamtsystem komplex verkoppelten unterschiedlichen physikalischen Wirkbereiche und Verhaltensgrößen sind gegenwärtig lediglich Teilaspekte in der Diskussion. So gibt es Konzepte und Implementierungen zur Kopplung von verschiedenen Spezialsimulatoren sowie zu Ex- und Import von Modell-Code zwischen Modellbeschreibungs- und Simulationssystemen.

Bild 2.332 veranschaulicht Möglichkeiten zur Systemsimulation für Teilmodelle mit verschiedenen Domänen, z.B. für mechanische, antriebstechnische, regelungstechnische und prozessbeschreibende Modellbestandteile, wie es für die virtuelle Werkzeugmaschine typisch ist.

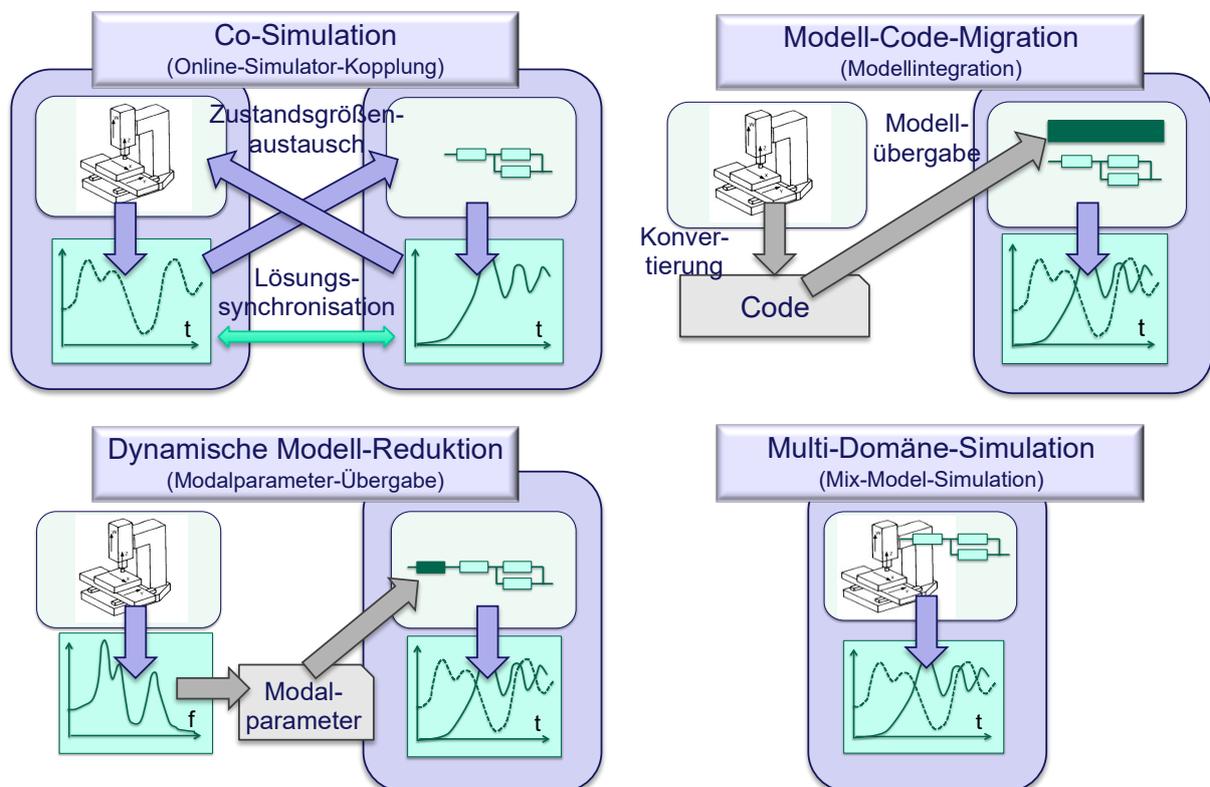


Bild 2.332 Möglichkeiten zur korrekten Systemsimulation bei Teilmodellen verschiedener Domänen

Die *Co-Simulation* ist eine Online-Simulator-Kopplung (Simulator-Backplane) und charakterisiert durch zwei, in der Regel unterschiedliche, komplette Simulatoren, bestehend aus Modellierer und Integrator, die synchronisiert ihre berechneten Zustandsgrößen austauschen, sodass die Ausgangsgrößen des einen Simulators die Eingangsgrößen des anderen Simulators bilden und umgekehrt. Gewöhnlich läuft die Co-Simulation mit konstanter Integrations-schrittweite, dabei bestimmt das Teilmodell mit der größten Grenzfrequenz die gemeinsame Schrittweite. Probleme können sich ergeben, wenn die zwei Modelle stark unterschiedliches dynamisches Verhalten haben. Häufig benötigt die Co-Simulation deutlich längere Rechenzeiten als beispielsweise die Multi-Domäne-Simulation.

Die *Modell-Code-Migration* ist eine effektive Methode, um Modelle einer Simulationsumgebung als abarbeitungsfähigen Code in das Modell eines anderen Simulators zu integrieren und unter diesem zu simulieren. Dazu müssen eine Schnittstelle zur Modellcodeübergabe und ein Formalismus zur Einbettung existieren. In MATLAB/Simulink leistet das beispielsweise die *s-function*.

Die *Dynamische Modell-Reduktion* kann zur Anwendung kommen, wenn der eigentlich nicht-lineare und simulationsrelevante Systembestandteil von einem, zwar dynamisch gekoppelten, in seinem Verhalten jedoch linearen und zumeist recht großen "Restsystem" umgeben ist. Eine simultan gekoppelte FEM-Rechnung für das große lineare Teilsystem ist jedoch aus mehreren Gründen unzuweckmäßig. Zum einen wären exorbitante Rechenzeiten und die Gefahr steifer Systeme die Folge. Zum anderen interessiert für die Simulation vom gesamten Umfang des großen linearen Teilsystems lediglich das dynamische Verhalten weniger ausgewählter Freiheitsgrade, nämlich nur die Koppelkoordinaten zwischen nichtlinearem und linearem Teilmodell - und da auch nur in einem begrenzten Frequenzspektrum. Abhilfe schafft hier die Dynamische Modell-Reduktion [13]. Auf der Grundlage der ohnehin meist bereits vorliegenden statischen und dynamischen FEM-Ergebnisse erfolgt entweder eine quasistatische Modell-Reduktion an den Systemmatrizen oder besser eine vollwertige dynamische Reduktion über die Modalparameter des FEM-Systems. Mit den so erhältlichen Parametern wird ein Koppellement spezifiziert, das in das Simulationsmodell aufgenommen wird und die gesamte interessierende Dynamik der FEM-Struktur abbildet.

Die *Multi-Domäne-Simulation* – auch als Mixed-Model-Simulation (MMS) bezeichnet – bietet als "echte" Systemsimulation die Möglichkeit, Modelle aus unterschiedlichen Fachdisziplinen in den jeweils üblichen Beschreibungsformen abzubilden und zu berechnen [13]. Es sei hier zunächst betont, dass keine der angeführten Methoden Ausschließlichkeit beanspruchen kann, sondern stets die konkrete Aufgabe über die Wahl des Verfahrens bzw. zweckmäßiger Kombinationen entscheidet. So dürfte es wenig sinnvoll sein, Modellwelten gänzlich unterschiedlicher Beschreibungs- und Lösungsbasis in einem Simulator vereinen zu wollen.

Nachfolgend soll am Beispiel des Gantry-Antriebs des Querträgers einer Laserschneidanlage die effektive Systemsimulation von Antriebsmechanik, Strukturdynamik und Signalverarbeitung demonstriert werden. Bild 2.333 zeigt die Vorgehensweise zur Berücksichtigung der Strukturdynamik des Querträgers über das modale Ersatzsystem. In Bild 2.334 ist die Modellstruktur der linear elastischen Baugruppe des Querträgers dargestellt. Die Ergebnisse der linearen dynamischen Strukturanalyse (Schwingungsformen und Modalparameter) sind in Bild 2.335 zu sehen. Bild 2.336 zeigt die objektorientierte Modellstruktur des Gesamtsystems. Bild 2.337 und Bild 2.338 stellen die Simulationsergebnisse für die Gantry-Achse bei Kreisfahrt um verschiedene Positionen.

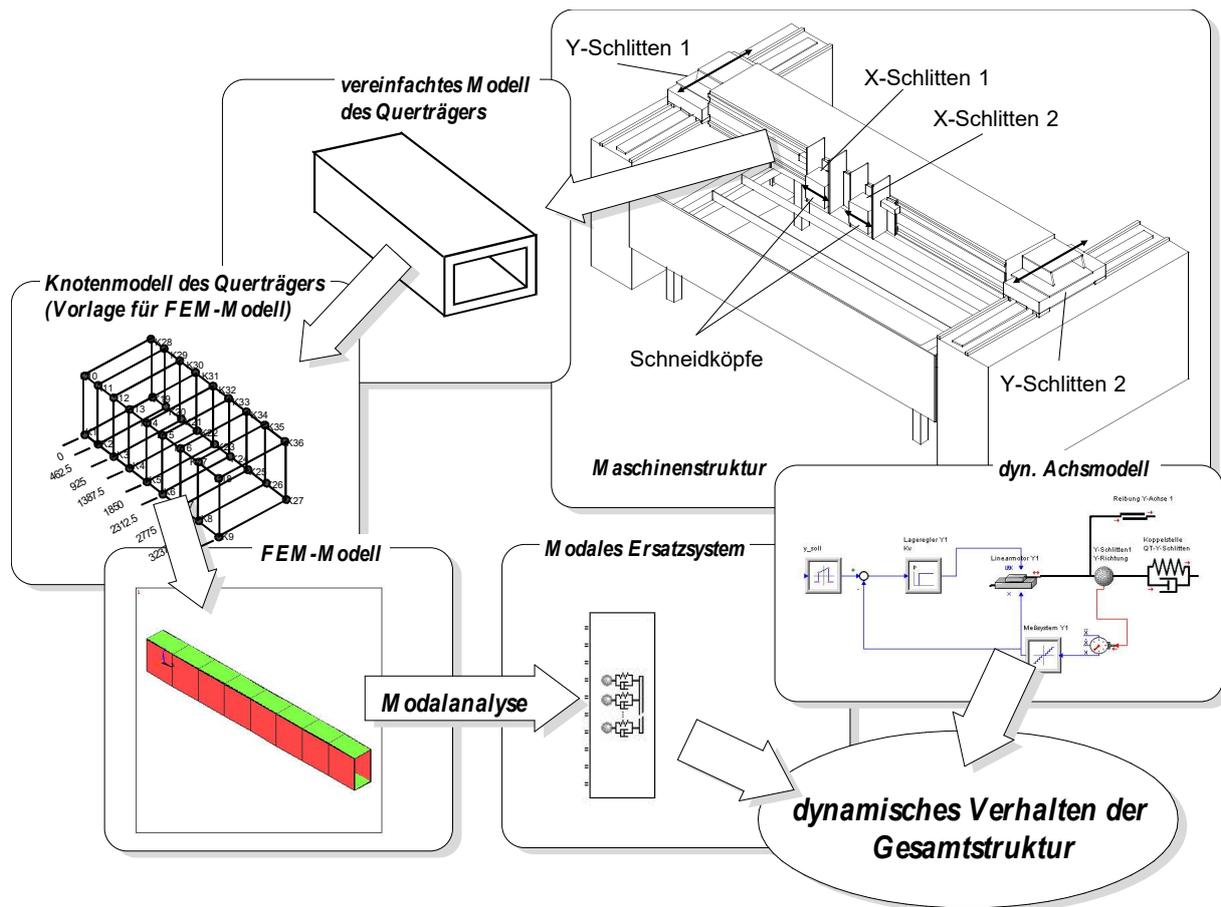


Bild 2.333 Vorgehensweise zur Berücksichtigung der Dynamik des Querträgers

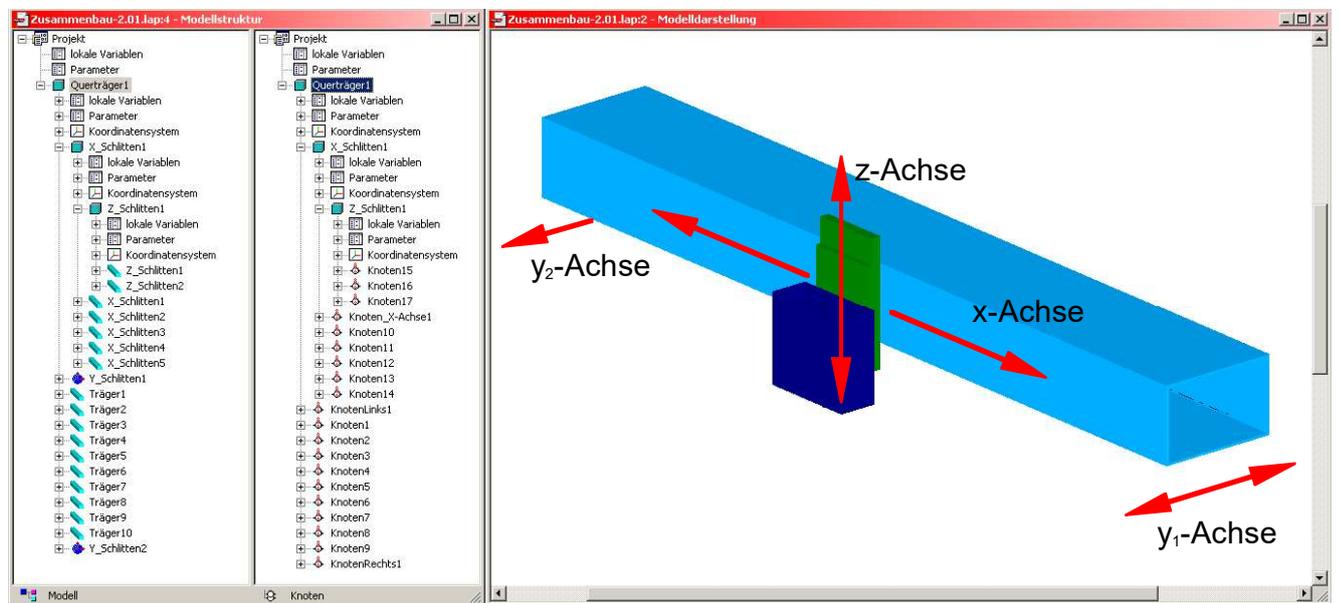


Bild 2.334 Modellstruktur der linear elastischen Baugruppe des Querträgers

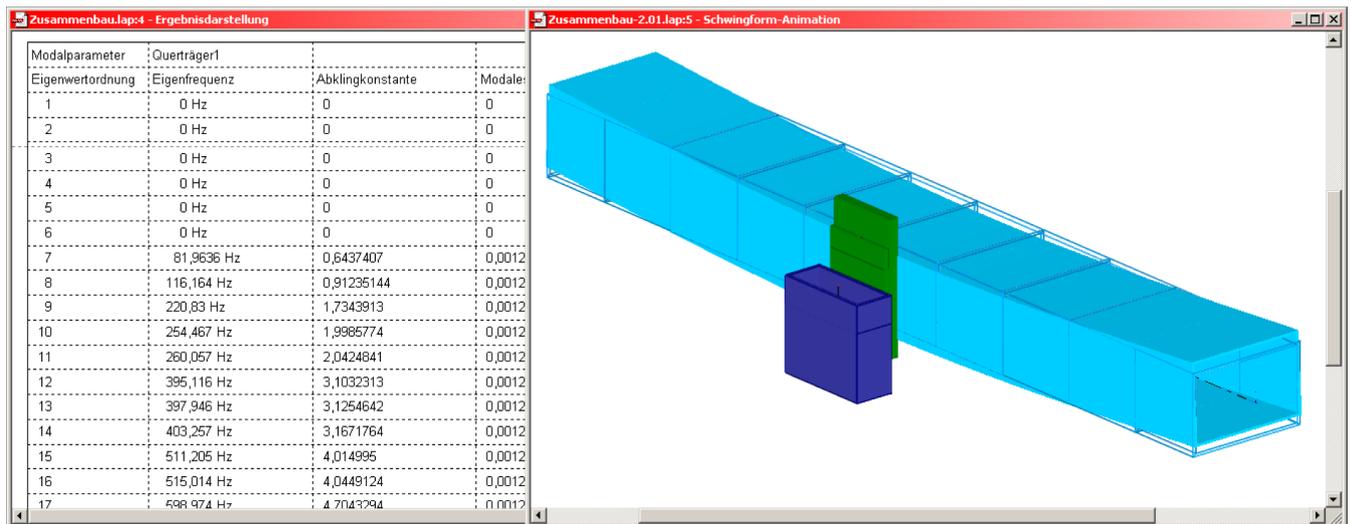


Bild 2.335 Schwingungsformen und Modalparameter der linear-elastischen Baugruppe

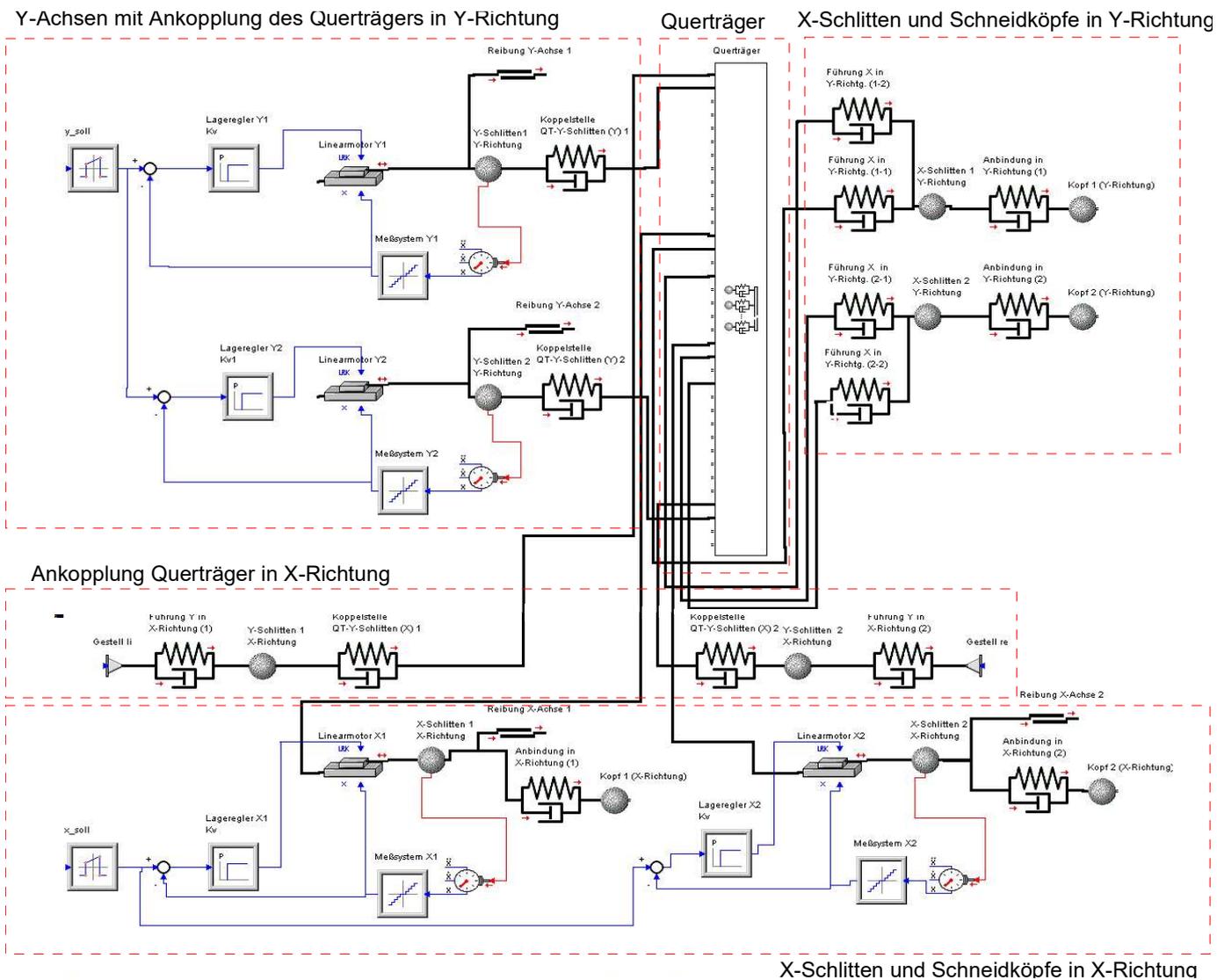


Bild 2.336 Objektorientierte Modellstruktur des Gesamtsystems unter ITI-SIM

Bearbeitungsbeispiel

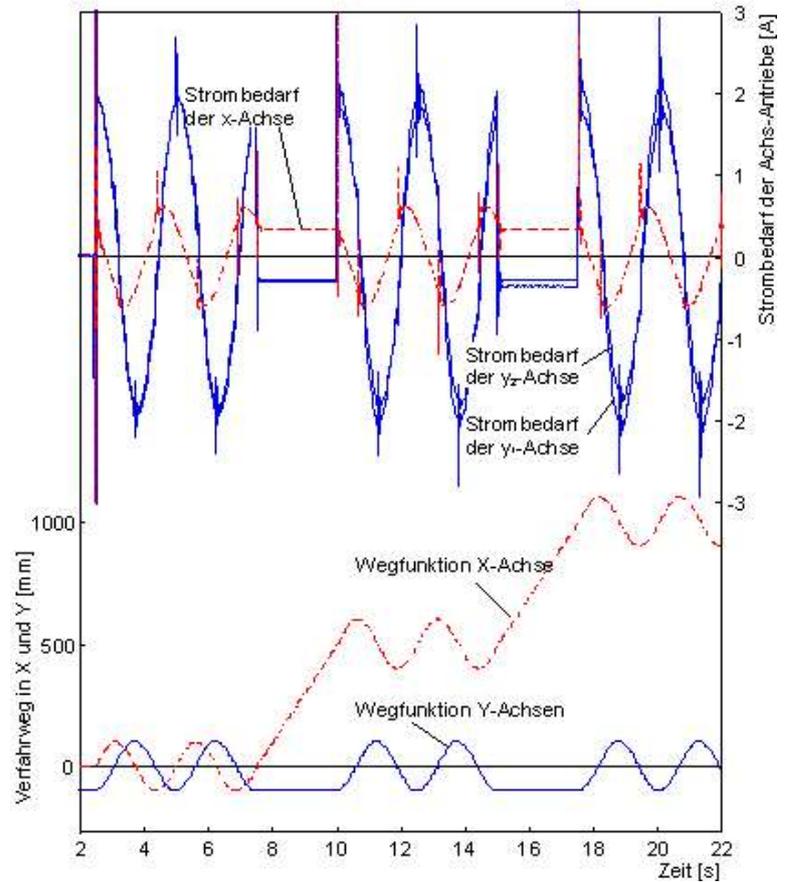
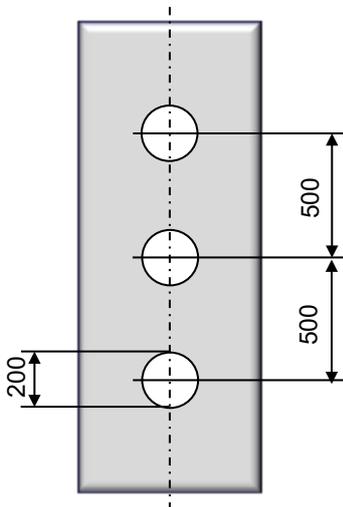


Bild 2.337 Simulationsergebnisse der Gantry-Achse

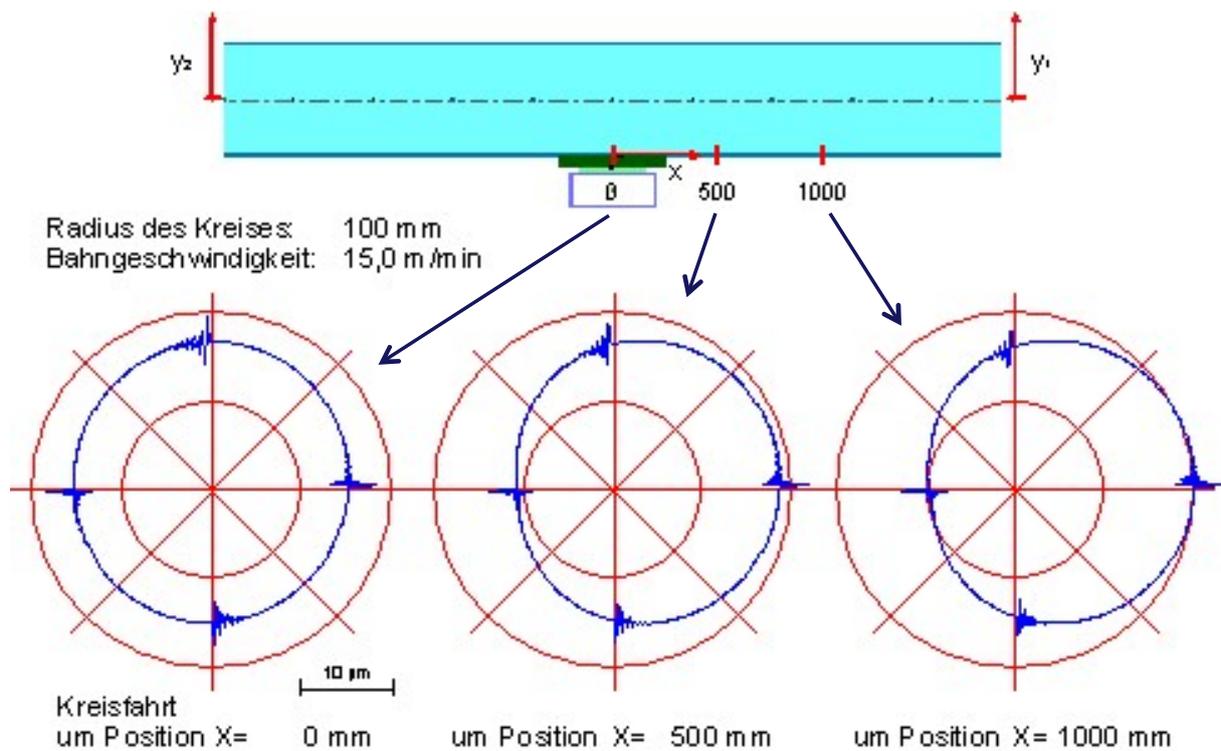


Bild 2.338 Simulationsergebnisse der Kreisfahrt um verschiedene Positionen

Neben den vier beschriebenen Verfahren zur Systemsimulation bei Teilsystemen aus unterschiedlichen physikalischen Domänen, existieren noch Methoden, welche es erlauben das Problem zumindest näherungsweise zu lösen. In Bild 2.339 sind die zwei gebräuchlichsten davon schematisch dargestellt.

Die *Iterative Kopplung* stellt eine Offline-Kopplung zweier Simulatoren dar. Dabei absolviert der eine Simulator eine vollständige Simulation mit geschätzten Anfangswerten für das Teilmodell. Die Ergebnisse werden dann dem zweiten Simulator als Anfangswerte für sein Teilmodell übergeben. Die damit am zweiten Simulator erhaltenen Simulationsergebnisse werden nun wieder als verbesserte Anfangswerte übergeben. Diese iterative Vorgehensweise wird solange fortgesetzt, bis ein Konvergenzkriterium erfüllt ist .

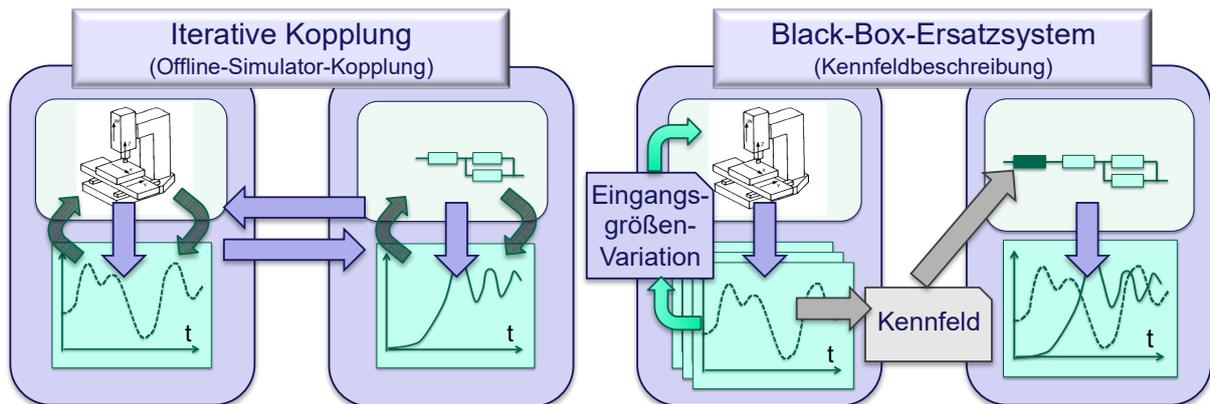


Bild 2.339 Möglichkeiten zur näherungsweisen Systemsimulation bei Teilmodellen verschiedener Domänen

Das *Black-Box-Ersatzsystem* ist ein Verhaltensmodell und in seiner Vorgehensweise der experimentellen Praxis entlehnt. Dabei wird das isolierte spezifische Teilsystem mit einem geeigneten Spezialesimulator modelliert und für definierte Eingangsgrößenvariationen berechnet. Die Ergebnisse werden anschließend in gegebenenfalls mehrdimensionalen Kennfeldbeschreibungen verdichtet und als Ersatzelement in das Simulationsmodell des Gesamtsystems aufgenommen. Das Verfahren setzt voraus, dass die Simulation am Teilsystem die Eingangsgrößen für das Gesamtsystem ausreichend abdeckt.

Bild 2.340 ordnet die Möglichkeiten zur Systemsimulation nach ihren Eigenschaften.

Die vorgenannten Simulatorkopplungen dienen der Systemsimulation bei Teilsystemmodellen verschiedener Domänen. Die folgend beschriebenen Simulatorkopplungen verbinden einen Simulator mit Hard- bzw. Software. Wesentliche Zeiteinsparungen im KEP durch Parallelisierung von Entwicklungs-, Test- und Inbetriebnahmearbeiten können nicht realisiert werden, da diese Arbeiten an eine Reihenfolge gebunden sind. So kann beispielsweise eine Steuerung als Hardware erst erprobt werden, wenn die Steuerungssoftware vorliegt. Diese wiederum kann erst getestet werden, wenn die zu steuernde Strecke aufgebaut ist. Hier sollen Hardware- bzw. Software-in-the-Loop Abhilfe schaffen .

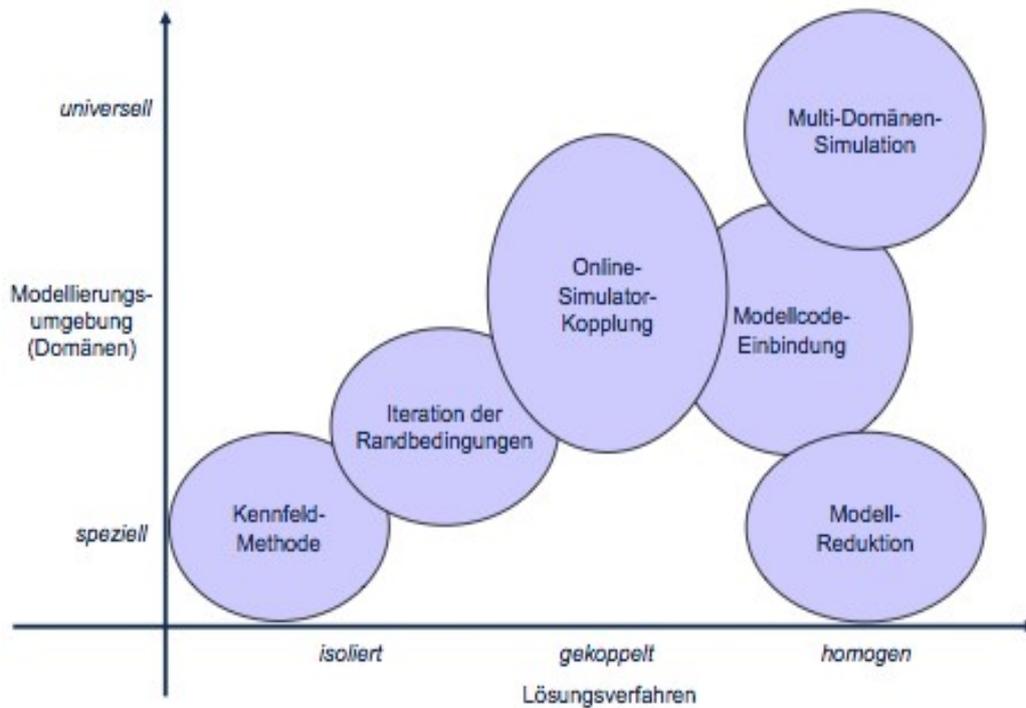


Bild 2.340 Eigenschaften der Möglichkeiten zur Systemsimulation

Mit *Hardware-in-the-Loop* (HiL) bezeichnet man ein Szenario, bei dem eine materielle Komponente in einer simulierten Anwendungsumgebung getestet wird. Bei *Software-in-the-Loop* (SiL) wird die entwickelte Steuerungssoftware an der simulierten zu steuernden Strecke getestet. Bild 2.341 veranschaulicht die beiden Methoden.

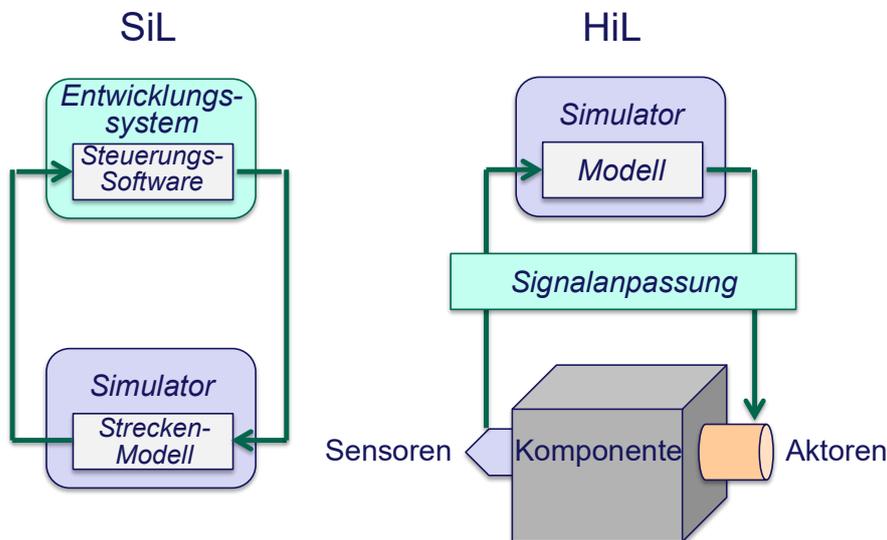


Bild 2.341 Software- und Hardware-in-the-Loop