

## 2.3 Methoden der Verhaltensanalyse

Berechnungs- und Simulationsergebnisse beantworten in der Regel die Aufgaben- und Problemstellung nicht direkt, sondern müssen zuvor noch aufbereitet und analysiert werden. Die gebräuchlichsten Analysemethoden sind die Bewertung, die Sensitivitätsanalyse und die Optimierung.

### 2.3.1 Bewertung

Die Bewertung erfolgt zumeist über Kenngrößen und im Vergleich.

#### 2.3.1.1 Einzelne Kenngrößen eines Verhaltensbereiches

Bild 2.342 zeigt für jeden Verhaltensbereich Beispiele für Bewertungskenngrößen.

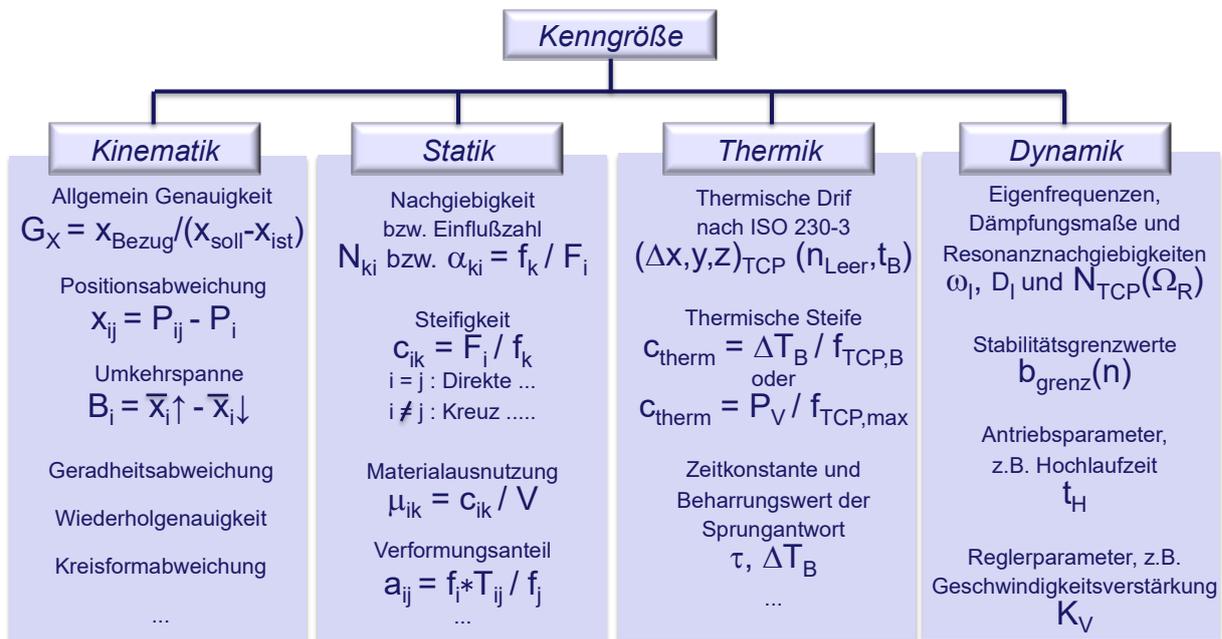


Bild 2.342 Beispiele für Kenngrößen aus den Verhaltensbereichen

In Tabelle 2.15 sind am Beispiel von Genauigkeitskenngrößen ihre Ursachen, Erfassung, Aufbereitung und Aussagen zusammengestellt.

<b>Fehlerursachen</b>	Spindelsteigungsfehler	Einzelachsfehler, Winkelfehler zwischen Achsen	Gesamtes Genauigkeitsverhalten von Maschine und Prozess
<b>Fehlerwirkung</b>	an Einzelachse	am Achsverbund	am Werkstück
<b>geeignete Messbahn</b>	Gerade (1D)	Für einfache Kinematiken: Kreisbahn (2D)	Werkzeugbewegung im NC-Programm (3-5D)
<b>Messsystem</b>	diskontinuierlich Laserinterferometer	mit quasikontinuierlich DBB, KGM	Fertigung Prüfwerkstück
<b>Datenaufbereitung</b>	glätten	beschneiden, FFT	glätten, Vermessung Prüfwerkstück auf KMM

<b>Genauigkeitskenngrößen</b>	Positionierabweichung, Umkehrspiel	Kreisumkehrspanne, Kreisformabweichung, Radialabweichung	Form-, Maß- und Lageabweichung am Werkstück
<b>Aussage/Nutzen</b>	Bewegungsgenauigkeit der Einzelachse in Achsrichtung	Hinweise auf Fehlerursachen, Bewegungsgenauigkeit zweier interpolierter Achsen	Fertigungsgenauigkeit der Maschine unter realen Bedingungen

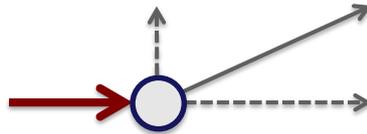
Tabelle 2.15 Beispiele aus der Kinematik

### 2.3.1.2 Mehrere Kenngrößen eines Verhaltensbereiches

Sollen die relevanten Verhaltenseinflüsse auf das drei- bis fünfdimensionale Bearbeitungsergebnis bewertet werden, so müssen aus den eindimensionalen mehrdimensionale Kenngrößen gebildet werden, wie Bild 2.343 an Beispielen der Statik demonstriert.

Beispiele aus der Statik:

Resultierende Steifigkeit bei Belastungsrichtung i:  $c_i = F_i / \sqrt{\sum_k f_k^2}$



Gesamtsteifigkeit bei gewichteten Belastungsrichtungen:  $c_{ges} = (\sum_i \varepsilon_i c_i) / \sum_i \varepsilon_i$

Mittlere Steifigkeit bei gewichteten Baugruppenpositionen:  $\bar{c}_i = (\sum_i \varepsilon_i c_i(P_i)) / \sum_i \varepsilon_i$

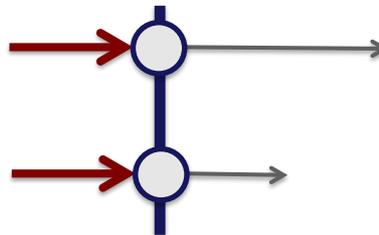


Bild 2.343 Beispiele zur „Verdichtung“ der Steife

Die Untersuchung des Einflusses der statischen Bearbeitungskräfte auf die Konturfehler führt zur quantifizierbaren Forderung nach hohen und möglichst gleichen Hauptsteifigkeiten an der Schnittstelle von Werkstück und Werkzeug. Dieses scheinbar triviale Ergebnis bereitet jedoch bei einer allgemeingültigen Umsetzung in Gestaltungs- und Dimensionierungsforderungen an die Gestellbaugruppen erhebliche Schwierigkeiten. Die Probleme resultieren einerseits aus der Vielfalt möglicher Bauformen und -größen, Achsaufteilungen und funktionaler Randbedingungen sowie aus wesentlichen Zusatzforderungen, wie beispielsweise nach wirtschaftlichem Materialeinsatz und geringer Aufstellfläche und andererseits aus dem numerischen Charakter der zugrundezulegenden Steifigkeits- bzw. Verformungsberechnungen. Praktisch wird aufgrund dieser Schwierigkeiten von allgemeingültigen Aussagen zu den Hauptabmessungen der Gestellbaugruppen gänzlich Abstand genommen und statt dessen werden für ein konkretisiertes Gestellkonzept mit den Methoden numerischer Variantenvergleiche und Optimierungsverfahren die Abmessungsrelationen der Gestellbaugruppen festgelegt. Ein solches Vorgehen kann jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, dass für die ent-

scheidende Konzeptphase - nämlich die Beantwortung der Fragen nach den Abhängigkeiten von Bauform und Baugröße sowie nach der Aufteilung der Vorschubachsen unter Beachtung des Einflusses der Lage der Führungen zum Arbeitsraum - kaum handhabbare Entscheidungshilfen vorliegen. Damit werden wesentliche Entscheidungen zu den produktivitäts- und genauigkeitsbestimmenden Finaleigenschaften des Erzeugnisses weitgehend traditionellen Vorstellungen oder subjektiv empfundenen Trendentwicklungen überlassen.

Das zwischen der Erzeugung möglicher Aufbauvarianten und der optimalen Dimensionierung ausgewählter Gestellstrukturen klaffende „Loch“ im Ablauf der Entwicklung ist nicht formal durch eine Erhöhung der an dieser Stelle gebundenen Datenverarbeitungskapazität schließbar, sondern bedingt inhaltliche Überlegungen zum methodischen Vorgehen und zu adäquaten Modellvorstellungen. Am Beispiel von Bohr/Fräswerken der bewährten Ein- und Zweiständer-Ausführungen sollen daher einfache Untersuchungsmöglichkeiten für die Grundzusammenhänge von Bauform und -größe auf die Volumen-Steifigkeitsrelationen im Hinblick auf die statischen Konturfehleranteile vorgestellt werden.

### Beschreibungsgrößen für die Gestellabmessungen

Ausgehend von einem repräsentativen Teilesortiment, ergibt sich neben den technologischen Forderungen die notwendige Arbeitsraumgröße der zu konzipierenden Maschine. Damit liegen im wesentlichen die baugrößenbestimmenden Abmessungen und Orientierungen der Verfahwege fest. Es erscheint nun zweckmäßig und gerechtfertigt, einer der Vorschubachsen in ihrem Einfluss auf die Gestellabmessungen einen Vorrang einzuräumen. Für die im Bild 2.344 dargestellte Einständerbauform in Kreuzschieberausführung ist dies die Verstellachse des Kreuzschiebers  $y$ , die unmittelbar die Bettlänge  $L_B$  und die Auskragung des Spindelstockes vor dem Ständer  $L_A$  festlegt. Entsprechend wird die mit Bild 2.345 veranschaulichte Zweiständerbauform durch die Spindelstock-Verfahrlänge auf dem Querträger  $y$  charakterisiert, welche direkt die Querträgerlänge  $L_Q$ , den Abstand der Seitenständer sowie die Bettbreite  $B_B$  bestimmt. Werden weiterhin für die unterschiedlichen Baugrößen geometrisch ähnliche Arbeitsräume zugrunde gelegt, so können die einzelnen Verfahwege in festen Verhältnissen zum Bezugsverfahweg  $y$  ausgedrückt werden, und  $y$  kennzeichnet unmittelbar die Baugröße. Mit  $y$  als Baugröße gilt:

$$x = \eta y; \quad w = \omega y; \quad z = \xi w = \xi \omega y.$$

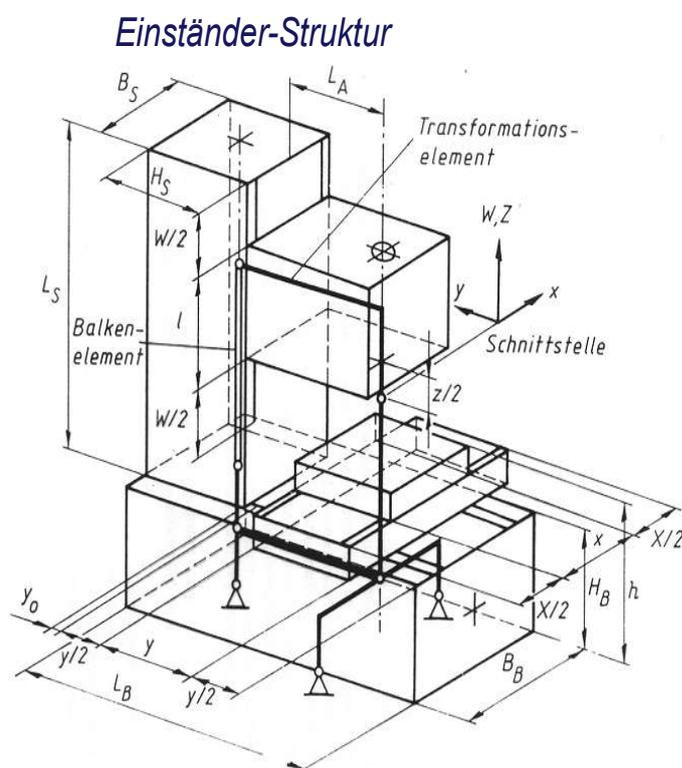


Bild 2.344 Bewertung alternativer Strukturen: Problemstellung – Einständerstruktur

Abmessungsverhältnisse:

$$y_0/y = 0,3 \quad l/z = 2,0 \quad H_B/h = 0,55 \\ B_B/x = 1,2 \quad H_S/y = 1,4 \quad B_S/H_S = 1,3$$

Neben den Verfahwegverhältnissen ( $\eta, \omega, \xi$ ) ergeben sich weitere, in Bild 2.344 und Bild 2.345 angeschriebene, aus den funktionellen Zusammenhängen begründbare, bauformspezifisch feste Abmessungsverhält-

nisse  $f$ , beispielsweise für die Überlaufwege oder aus günstigen Breiten-Längen-Relationen für geführte Baugruppen. Sofern diese Abmessungsverhältnisse unabhängig von der Baugröße für eine Bauform nicht konstant sind, so ist doch ihre Variationsbreite praktisch vernachlässigbar.

Die folgenden Größen gelten für sowohl für die Einständer-Struktur nach Bild 2.344 als auch für die Zweiständer-Struktur nach Bild 2.345.

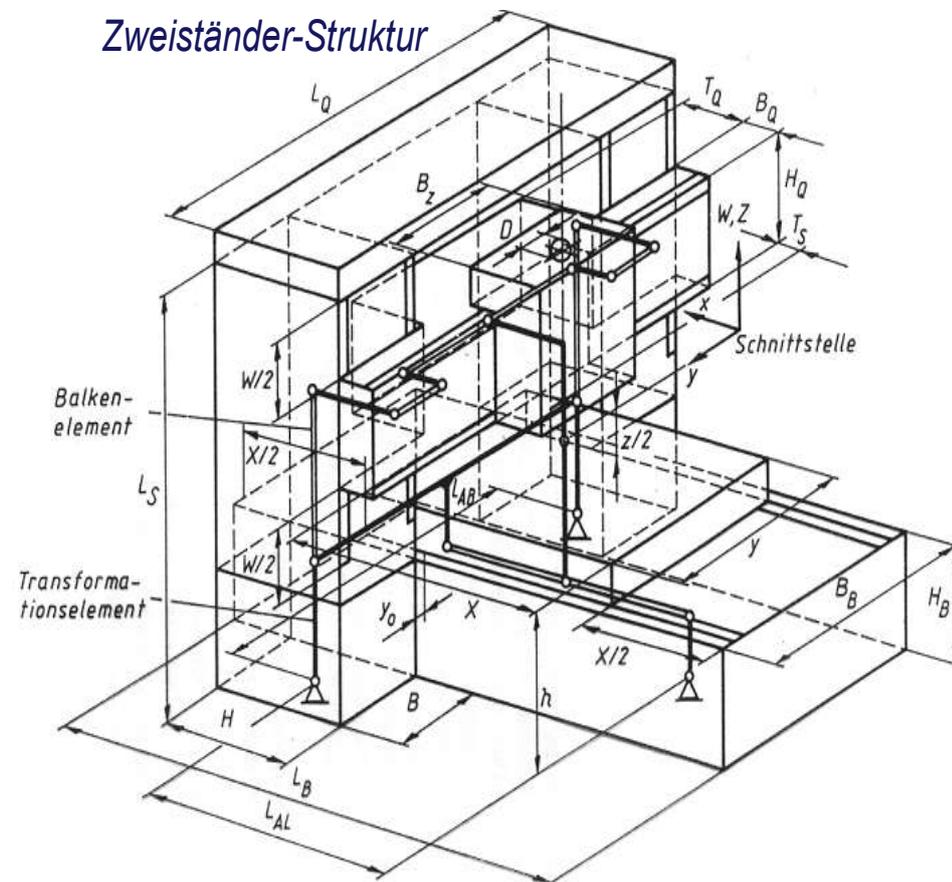
Verfahrwegverhältnisse:  $x/y = 1,5$   $w/y = 1,0$   $z/w = 0,5$

Grundgrößen: Bedienhöhe  $h = 1000 \text{ mm}$

Wanddicken:  $s = 20 \text{ mm}$

Werkstoff:  $E = 10^5 \text{ N/mm}^2$

Die Abmessungen  $L_S, L_B, H_S, H_B, B_S, B_B, I, L_A, L_Q, L_{AB}, L_{AL}, B_Q$  sind als Abhängige darstellbar.



Abmessungsverhältnisse:

$y_0/y = 0,1$ ;  $B_Q/H_Q = 0,4$   $H_B/h = 0,55$ ;  $H_Q/z = 1,2$ ;  $T_Q/B_Q = 2,2$ ;  $B_Z/H_Q = 1,0$

$T_S/D = 1,5$ ;  $H_B/h = 0,7$ ;  $D/z = 0,3$ ;  $B_S/y = 0,7$ ;  $H_S/B_S = 1,3$

Bild 2.345 Bewertung alternativer Strukturen: Problemstellung - Zweiständerstruktur

Werden schließlich aus ergonomischen Gründen die Bedienhöhe  $h$ , das heißt der Abstand von Stand- zu Aufsannfläche, sowie aus Gründen der Modellvereinfachung die Wandstärken  $s$  der ersetzenden Bauteilquerschnitte als konstante Grundgrößen eingeführt, so verbleiben nach dem Anschreiben aller funktionell und geometrisch gegebenen Abhängigkeiten

für die beiden dargestellten Bauformen neben der Baugröße  $y$  nur noch die Hauptabmessungen der Ständerquerschnitte  $H_S$  und  $B_S$  als Variable, zweckmäßig als Verhältnisse notiert.  $\kappa_S = H_S/y$ ;  $\beta_S = B_S/H_S$  bzw.  $\tau_S = B_S/y$ ;  $\delta_S = H_S/B_S$

Mit einem derartigen Vorgehen werden alle für die Berechnung der Volumen-Steifigkeits-Beziehungen relevanten Gestellabmessungen auf die Baugröße und die Querschnittsverhältnisse am Ständer reduziert, wodurch die angestrebten Untersuchungen einfach und übersichtlich werden.

### Berechnung der Volumen-Steifigkeits-Relationen am Gestell

Zur Berechnung der Volumen- und Nachgiebigkeitsanteile der Hauptbaugruppen des Gestells werden einfachste Modellvorstellungen benutzt. Es werden kastenförmige Bauteile mit dünnwandig geschlossenem Rechteckquerschnitt zugrunde gelegt. Für die Verformungsrechnungen werden elastische Balken- und starre Transformationselemente verwendet, Bild 2.346.

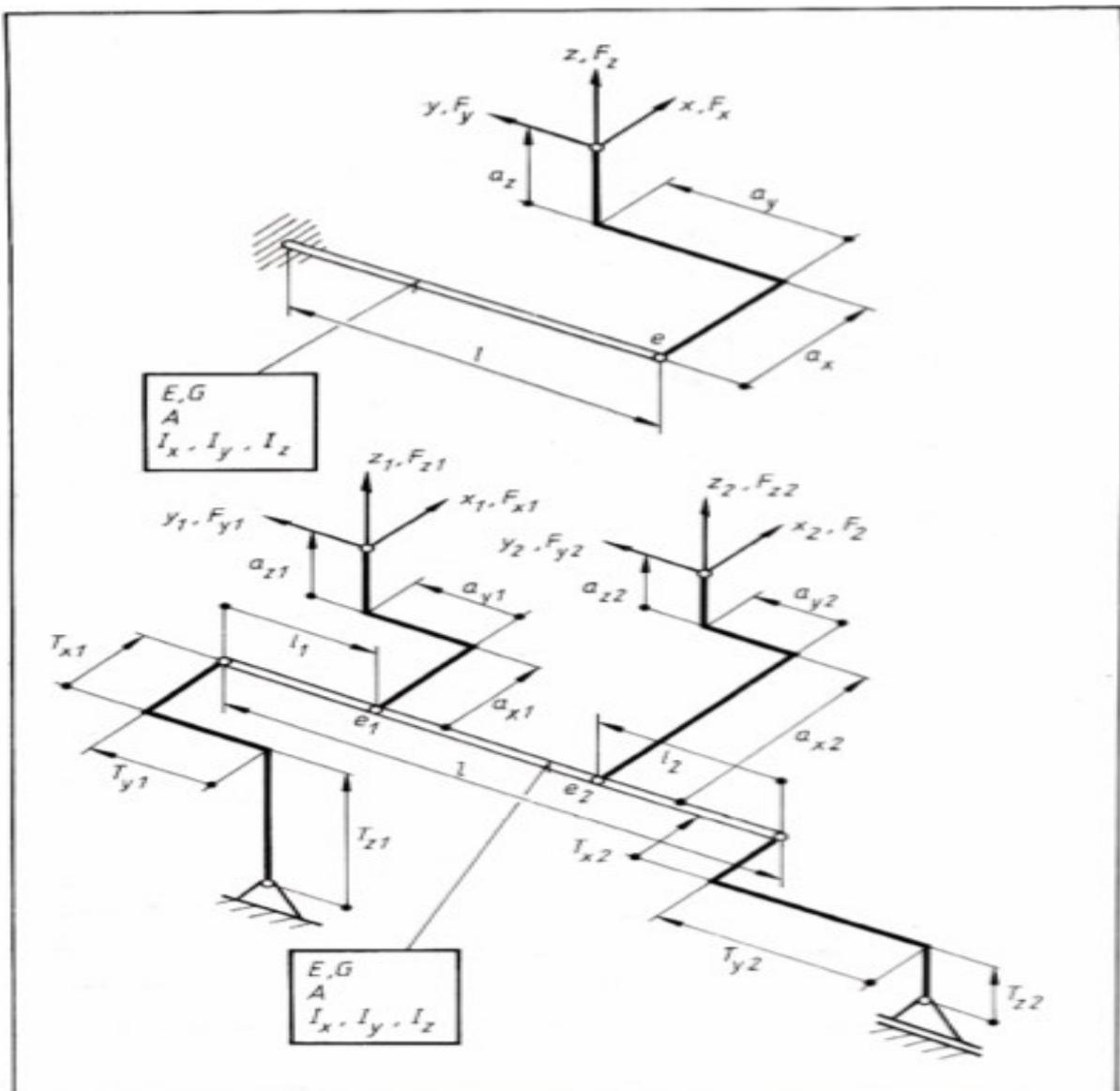


Bild 2.346 Modellelemente zur Verformungsberechnung

Die interessierenden Belastungen und Verformungen treten an der Wirkstelle, das heißt relativ zwischen Werkstück und Werkzeug, auf.

Infolge der Beschränkung auf die Grundtendenzen des Dimensionierungsproblems werden starke Vereinfachungen - insbesondere bezüglich des Schub- und Torsionsverhaltens - vorausgesetzt, welche eine geschlossene analytische Darstellung der Zusammenhänge gestatten. Für die Durchführung der Berechnungen ist es ausreichend, die beiden im Bild 2.346 dargestellten Grundelemente verfügbar zu haben, wobei von den bekannten Elementnachgiebigkeiten (Einflusszahlen) des Balkens  $[N]_E$  ausgegangen wird.

Unter den Elementbelastungen  $\{F\}_E$ , welche mit  $\{F\}_E = [a]^T \{F\}$  aus den globalen Lasten  $\{F\}$  erhältlich sind, ergeben sich die Elementverformungen zu  $\{x\}_E = [N]_E \{F\}_E$ . Diese werden dann durch  $\{x\} = [a] \{x\}_E$  in die globalen Koordinaten transformiert. Daraus folgt  $\{x\} = [a][N]_E [a]^T \{F\}$  als Verformungsanteil des Elementes an der globalen Belastungsstelle. Für das im Bild 2.346 (*unten*) dargestellte Element ist neben der Verwendung zweier Belastungs-Verformungs-Knoten eine zusätzliche Transformation der Randbedingungen durchzuführen.

Im konkreten Berechnungsablauf werden die in den Strukturen von Bild 2.346 enthaltenen Elemente nacheinander, entsprechend Art, Abmessungen und Lage durch Aktualisierung der formalen Parameter der Grundelemente abgearbeitet und liefern somit die Anteile, der Schnittstellenverformung. Ein solches Vorgehen ist ohne Schwierigkeiten auf statisch bestimmte Strukturen anwendbar, sichert die Überschaubarkeit der Beziehungen und kommt durch Umgehung größerer Matrizenoperationen mit einfachindizierten Größen aus.

Bei Verwendung von aufeinanderfolgenden Einheitsbelastungen an der Wirkstelle sind durch Summation der elementbedingten Verformungsanteile die Nachgiebigkeiten an den Wirkstellen

$$\begin{aligned} N_{xx} &= x_x/F_x; & N_{yx} &= N_{xy}; & N_{zx} &= N_{xz}N_{xy} = x_x/F_y; & N_{yy} &= y_y/F_y \\ N_{zy} &= N_{yz}; & N_{zx} &= x_z/F_z; & N_{yz} &= y_z/F_z; & N_{zz} &= z_z/F_z \end{aligned}$$

erhältlich.

Diese, das Verformungsverhalten der Struktur charakterisierenden, Kenngrößen sind für einen definierten Arbeitsraum neben den Variablen nun noch von den Bauteilstellungen, das heißt der konkreten Lage der Wirkstelle im Arbeitsraum, abhängig.

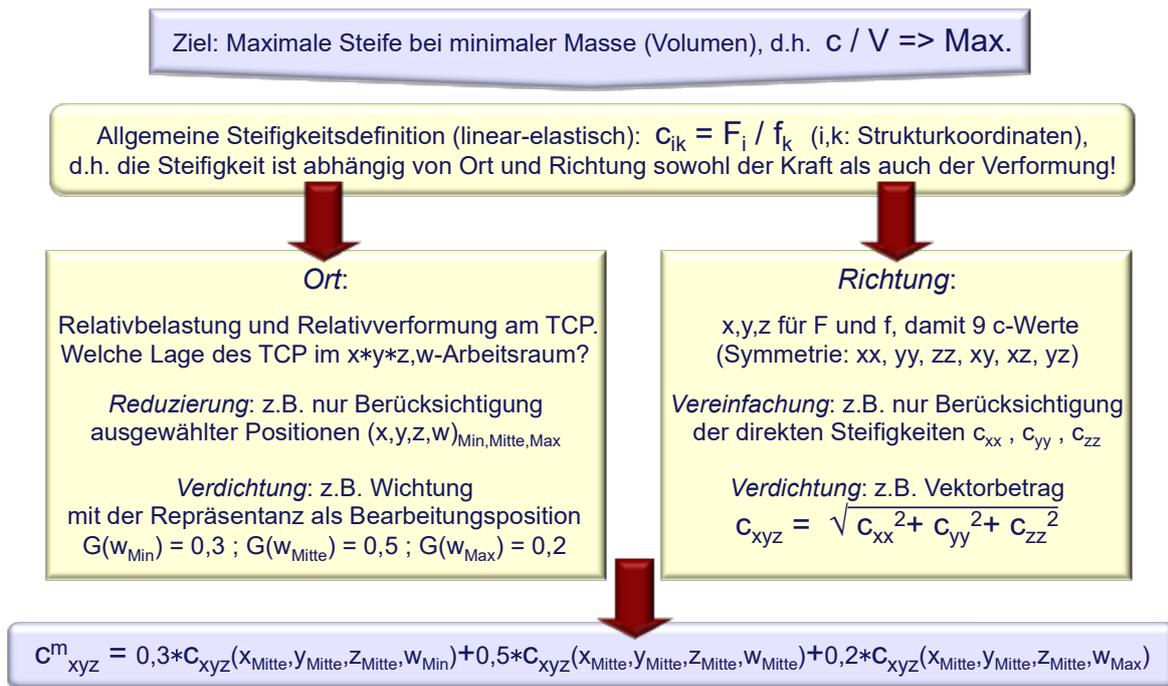


Bild 2.347 Bewertung alternativer Strukturen: Problematik bei der Formulierung von Bewertungsgrößen

Bild 2.347 veranschaulicht das Problem der Zusammenfassung mehrerer Kennwerte zu einem Bewertungskennwert am Beispiel der richtungs- und positionsabhängigen Wirkstellensteifigkeit.

Wird zunächst der Wirkstellenlage in der Mitte des Arbeitsraumes, das heißt für die Mittelstellung aller Vorschubachsen, die höchste technologische Repräsentanz zugebilligt, so verbleibt das Problem der gleichzeitigen Beurteilung von sechs Nachgiebigkeitskennwerten. Zur Reduktion auf einen aussagefähigen Kennwert soll daher eine technologisch sinnvolle Vergleichsnachgiebigkeit definiert werden.

$$N_{Verg} = \sqrt{\left( \left( \gamma_{Bo} (N_{xz}^2 + N_{yz}^2) + \gamma_{Fr} (N_{xx}^2 + 2N_{xy}^2 + N_{yy}^2) \right) \right) / (\gamma_{Bo} + \gamma_{Fr})} \quad (2.87)$$

Dabei stellen  $\gamma_{Bo}$  und  $\gamma_{Fr}$  die Wichtungsfaktoren für die anteilmäßige Bohr- und Fräsbearbeitung dar.

Gleichung (2.87) lässt sich für die mit Bild 2.344 gegebenen Strukturbedingungen wesentlich vereinfachen. Infolge des Zusammenfalls von Hauptachsen- und Maschinenkoordinaten gilt für die Einständerbauform exakt und für die Zweiständerausführung näherungsweise  $N_{xy} = 0$ . Weiterhin folgt aus den praktischen Steifigkeitsverhältnissen und dem Strukturaufbau  $N_{xz} \approx 0$  für die Einständerbauform und  $N_{yz} \approx 0$  für die Zweiständerbauform. Wird schließlich vereinfachend  $\gamma_{Bo} = \gamma_{Fr}$  gesetzt, dann wird aus (2.87)

Für die Einständerbauform folgt damit

$$N_{Verg} = \sqrt{(N_{xx}^2 + N_{yy}^2 + N_{zz}^2) / 2} \quad (2.88)$$

und für die Zweiständerbauform

$$N_{Verg} = \sqrt{(N_{xx}^2 + N_{yy}^2 + N_{zz}^2)/2}, \quad (2.89)$$

beziehungsweise die reduzierte Steifigkeitskenngröße  $C_{xyz}^{w/2} = 1/N_{Verg}^{w/2}$ .

(Der Exponent  $w/2$  soll auf die Mittelstellung aller Bauteillagen verweisen.)

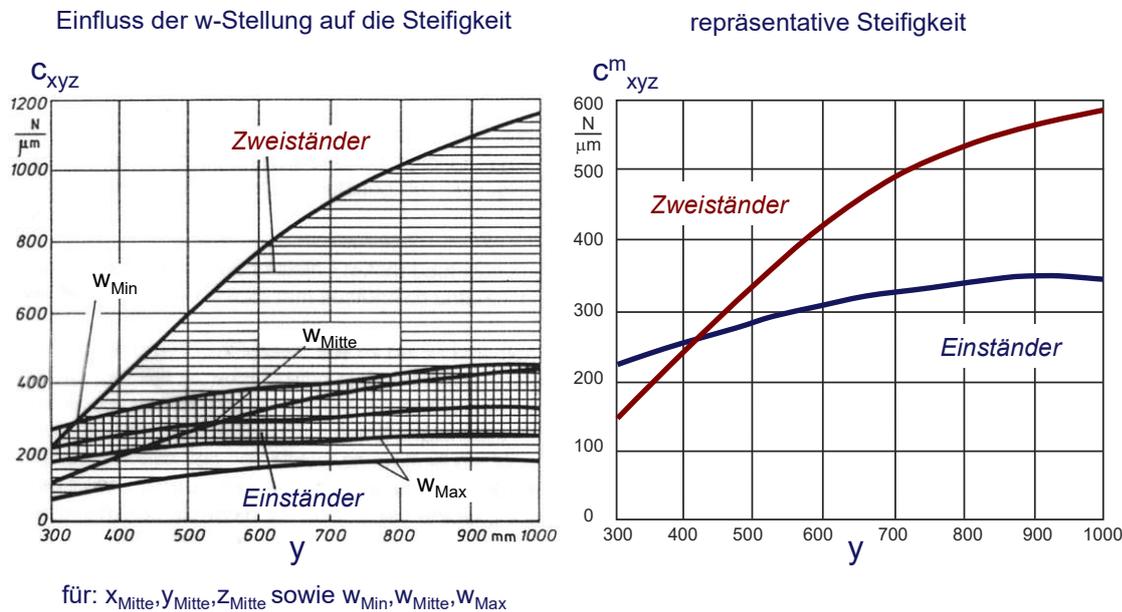


Bild 2.348 Bewertung alternativer Strukturen: Verdichtete und gewichtete Steifigkeit

Für die folgenden Parameteruntersuchungen soll stets ein Arbeitsraum mit den Verfahrwegverhältnissen  $\eta = 1,5$ ;  $\omega = 1,0$  und  $\xi = 0,5$  zugrunde gelegt werden.

Eine eingehendere Variablendiskussion liefert die günstigen Abmessungsverhältnisse  $\kappa_S = 1,4$ ;  $\tau_S = 0,7$  bzw.  $\beta_S = 1,3$ ;  $\delta_S = 1,3$  für welche die folgenden Untersuchungen durchgeführt wurden. Bild 2.348 (links) zeigt für Ein- und Zweiständerausführung den Einfluss der Stellung von Spindelstock bzw. Querträger, das heißt die Abhängigkeit der Verformungskenngrößen von der  $w$ -Fahrt.

Die Zweiständerbauform weist vor allem unter Fräsbelastung einen großen Einfluss der Querträger-Höhenstellung aus. Im mittleren bis oberen Arbeitsbereich der  $w$ -Achse liefert die Zweiständerausführung praktisch über dem gesamten Baugrößenspektrum keine Vorteile gegenüber dem Einständer im reduzierten Steifigkeitsverhalten. Die aus dem Einfluss der  $w$ -Stellung folgende Varianz der dem Bauformvergleich zugrunde gelegten Steifigkeitskenngrößen führt zum Verwischen des baugrößenabhängig begründbaren Überganges von der einen zur anderen Bauform. Es soll daher im weiteren eine technologische Wichtung der  $w$ -Stellungen vorgenommen werden. Zum Beispiel wird für  $N_{xx}$  folgen

$$N_{xx}^m = (\sum_i \gamma_i N_{xx}^i) / (\sum_i \gamma_i)$$

mit  $i = 1$  für die untere  $w$ -Stellung,  $i = 2$  für die Mittelstellung sowie  $i = 3$  für die obere  $w$ -Stellung und  $\gamma_1 = 0,3$ ;  $\gamma_2 = 0,5$  und  $\gamma_3 = 0,2$  verwendet. Die derart gewichteten Nachgiebigkeiten werden zur Berechnung der Steifigkeit  $C_{xyz}^m$  verwendet.

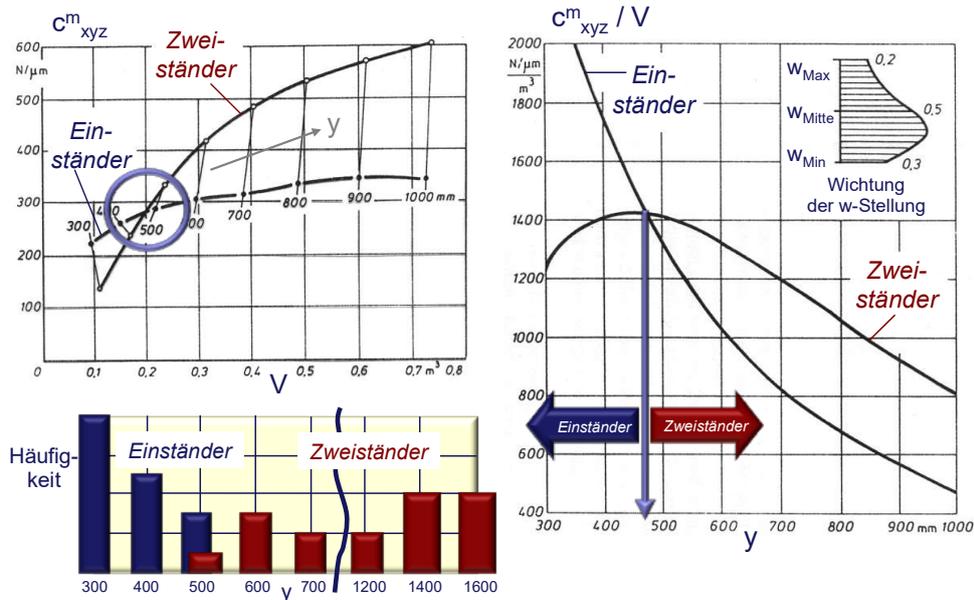


Bild 2.349 Bewertung alternativer Strukturen: Maximum des Steifigkeits-Volumen-Verhältnis

Bild 2.349 (rechts) zeigt die entsprechenden Steifigkeits-Volumen-Verhältnisse über der Baugröße. Die Darstellung liefert durch die Verwendung günstiger Ständerabmessungsverhältnisse und die Berücksichtigung des Einflusses der  $w$ -Stellung eine Einschränkung und Verschiebung des Übergangsbereiches von Ein- und Zweiständerbauformen zu Baugrößen  $400 \text{ mm} < y < 600 \text{ mm}$ . Im Bild 2.349 (links, unten) ist die Häufigkeit real ausgeführter Ein- und Zweiständerbauformen über der Baugröße aufgetragen. Demnach bestätigt auch die Praxis den Übergang der Bauformen in der Nähe  $y = 500 \text{ mm}$ .

### 2.3.1.3 Mehrere Kenngrößen aus verschiedenen Verhaltensbereichen

Die Praxis bei der Entwicklung der Werkzeugmaschinen ist gekennzeichnet von dem Streben mehrere Ziele, die sich häufig auch noch widersprechen, zu erreichen. Dabei sollen die geometrisch-kinematischen und die thermisch bedingten Fehler minimal sowie die statischen und dynamischen Steifigkeiten maximal werden. Und das bei minimalen Volumen, Aufstellfläche und Aufwand sowie bei maximaler Leistungsauslastung und Antriebsdynamik. Die Bewertung so breit gestreuter Forderungen mit Kenngrößen ist nicht zielführend, ganz zu schweigen von den Schwierigkeiten, den Aufwand objektiv zu bemessen. Bild 2.350 veranschaulicht, wie komplex sich bereits die Bewertung der statischen und dynamischen Eigenschaften darstellt.

#### Typische Ziele einer Gestaltung (Struktur, Dimension):

Verformung minimal oder zumindest begrenzt :  $f_k < f_{k0}$

Niedrigste Eigenfrequenz maximal oder zumindest begrenzt :  $\omega_1 > \omega_{10}$

Masse bzw. Volumen minimal oder zumindest begrenzt :  $m$  bzw.  $V < m_0$  bzw.  $V_0$

#### Typische Restriktionen einer Gestaltung (Struktur, Dimension):

Abmessung begrenzt bzw. gestuft bzw. fix :  $L_i < \text{oder} > L_{i0}$  bzw.  $L_i = (L_{i1}, \dots, L_{in})$  bzw.  $L_i = L_{i0}$

Fläche bzw. Teilvolumen begrenzt :  $A_i < A_{i0}$  bzw.  $V_i < V_{i0}$

Bild 2.350 Ziele und Restriktionen bei der Gestaltung aus den Bereichen Statik und Dynamik

## 2.3.2 Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivitätsanalyse ist eine Vorstufe bzw. der erste Schritt einer deterministischen Optimierung. Im Zusammenhang mit der optimalen Dimensionierung identifiziert die größte Parametersensitivität (analytisch:  $\alpha_{ij} = \delta V_i(P) / \delta(P_j)$ ; numerisch:  $\alpha_{ij} \approx \Delta V_i(P) / \Delta P_j$  die Suchrichtung. Um die Vergleichbarkeit zwischen den Parametersensitivitäten für unterschiedliche Parameter sicher zu stellen, muss die Parameterdifferenz

$$\Delta P_j = \varepsilon (P_{j,Max} - P_{j,Min})$$

relativ gesetzt werden.  $\varepsilon$  steht für den Prozentsatz.

## 2.3.3 Optimierung

Während der Umgang mit den Kenngrößen im Rahmen der Bewertung und der Sensitivitätsanalyse offen für manuelle Eingriffe ist, müssen in der Optimierung alle Zielfunktionsanteile, Restriktionen und Bedingungen exakt festgelegt werden. Da die Ziele und die Bedingungen oft kaum beschreibbar und gegensätzlich sind, liefern die Optimierungsergebnisse häufig unkontrollierbare Kompromisse, wenn die Optimierungsmodelle nicht der Aufgabenstellung entsprechen. Es sei hier ausdrücklich davor gewarnt, in der Optimierung das Allheilmittel gegen fehlendes Fachwissen, Konstruktionserfahrung und mangelnde Kreativität zu sehen. Die Optimierung setzt für ihre erfolgreiche Anwendung gerade erhebliches Wissen voraus, um die sinnvollen Einsatzgebiete zu identifizieren und zu beschreiben. Das Bild 2.351 stellt Merkmale des Optimierungsmodells zusammen.

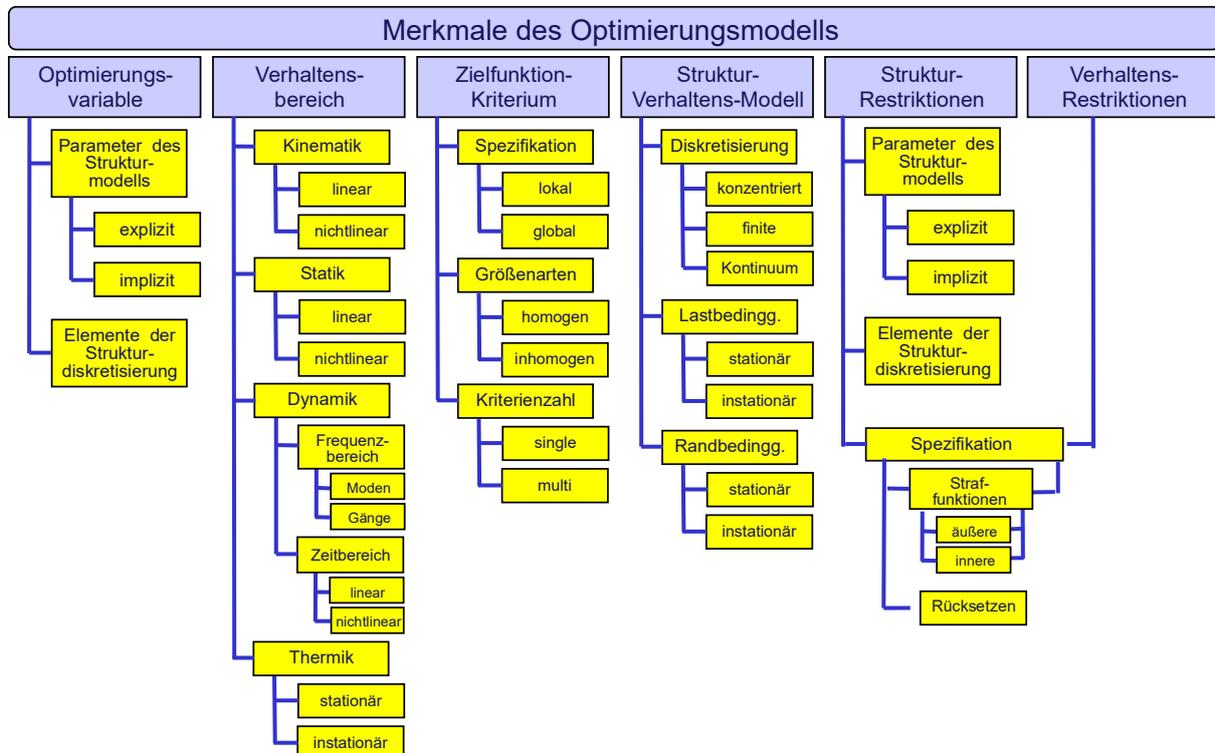


Bild 2.351 Merkmale des Optimierungsmodells

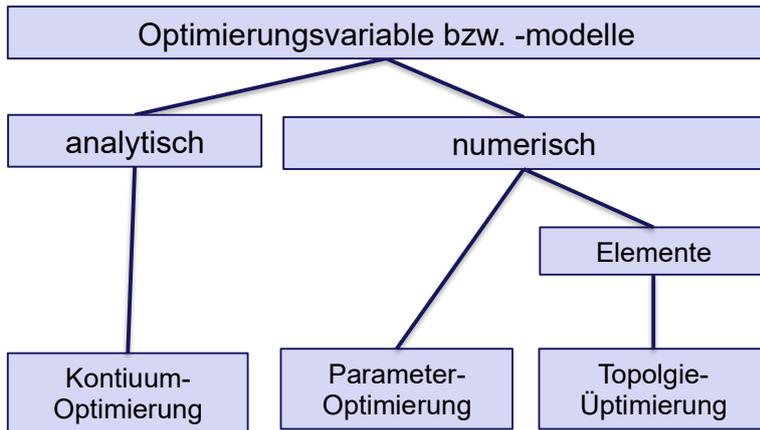


Bild 2.352 Optimierungsverfahren aus Modellsicht

### Kontinuum

$$\sigma_R = M(x)/W_R = 6F_x/(bh^2); \quad h(x) = \sqrt{(6F_x/(\sigma_R b))}h_0 = h(l) = \sqrt{(6Fl/(\sigma_R b))}$$

$$h(x) = h_0\sqrt{(x/l)}$$

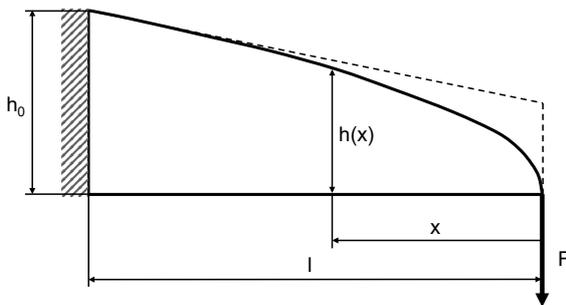


Bild 2.353 Träger gleicher Randspannung

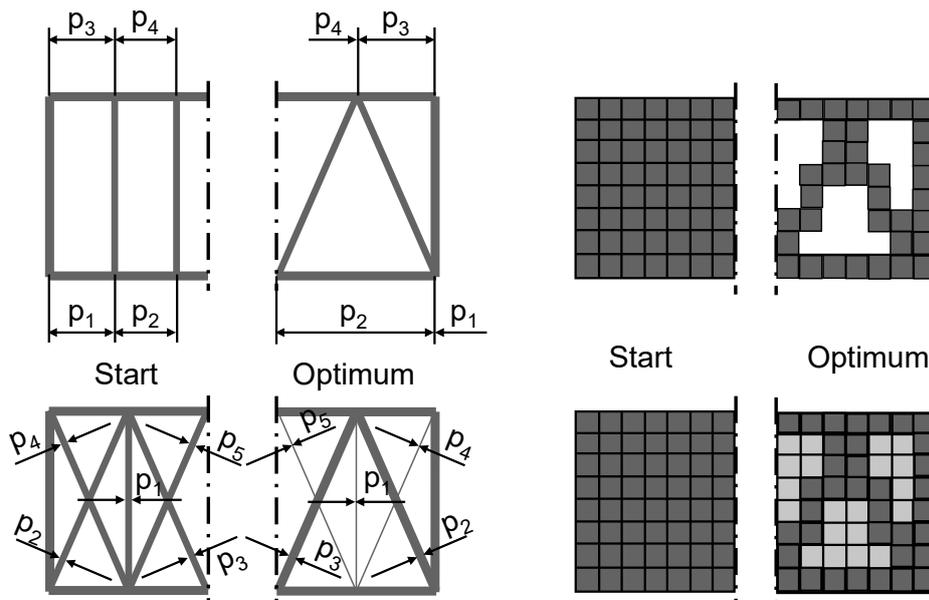


Bild 2.354 Vergleich von Parameter- und Topologieoptimierung an einer Tragstruktur

### 2.3.3.1 Parameteroptimierung

Das Problem der Dimensionierung statisch und dynamisch beanspruchter Baugruppen besteht in der Wahl solcher Abmessungen, die für die Gesamtstruktur eine Erfüllung der in der entsprechenden Anforderungsliste fixierten statischen und dynamischen Verhaltensforderungen garantieren. Sollen im Rahmen der Dimensionierung zusätzlich ökonomische Aspekte Berücksichtigung finden, so gelangt man vielfach zu einer Optimierungsaufgabe. Es sind dann z.B. die Verhaltensforderungen über die Abmessungen der Struktur mit einem Aufwandsminimum zu realisieren. Aber auch ohne die Hinzunahme derartiger Zielstellungen kann die Dimensionierung eine Optimierung erfordern, wenn einzelne Abmessungen von gegenläufigem Einfluss auf verschiedene interessierende Verhaltensgrößen sind.

Das Optimierungsproblem der Dimensionierung lässt sich in eine mathematische Optimierungsaufgabe überführen, sofern der Aufbau eines mathematischen Modells zur Formulierung von Zielfunktion und Restriktionen in Abhängigkeit von den Variablen möglich ist, Bild 2.355.

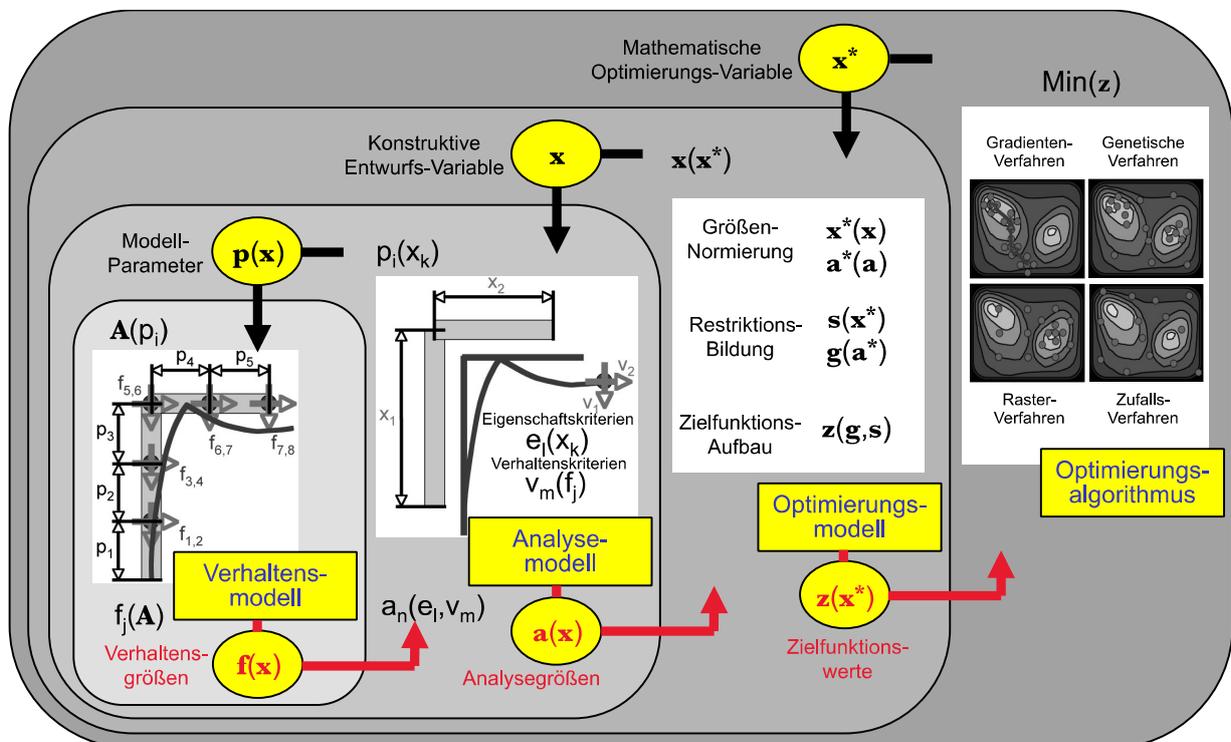


Bild 2.355 Modellebenen der Parameteroptimierung

Hierfür erweist sich das Balkenmodell als besonders geeignet, da damit bei relativ geringem Modellierungs- und Berechnungsaufwand die Zusammenhänge von Kosten- bzw. Werkstoffeinsatz sowie statischen und dynamischen Verhaltensgrößen einerseits und konstruktiven Abmessungsgrößen andererseits funktionell dargestellt werden können. Zudem entspricht das Balkenmodell am besten dem geometrisch-strukturellen Abstraktionsgrad für die Dimensionierung der grobgestalteten Entwurfsvarianten.

Bei der Überführung des Dimensionierungsproblems in eine mathematische Optimierungsaufgabe werden den Problemgrößen der Aufgabenstellung der Dimensionierung die Bestandteile des mathematischen Optimierungsmodells: Zielfunktion, Variable und Restriktionen zugeordnet. Mit der Zielfunktion wird das Kriterium formuliert, nach welchem die Variab-

len optimal gewählt werden sollen. Für die Dimensionierung besteht hier das Ziel des Kostenminimums oder der Realisierung von extremen Verhaltensforderungen. Der Zusammenhang von Zielfunktion, Variablen und Restriktionen wird durch das mathematische Optimierungsmodell realisiert. Die Bestimmung der optimalen Variablenwerte erfolgt durch die Minimierung der Zielfunktion. Da sowohl die Kosten als auch die Verhaltensgrößen nichtlinear von den Abmessungen abhängig sind, handelt es sich bei der optimalen Dimensionierung um eine Aufgabe der Nichtlinearen Optimierung. Zur Schaffung der theoretischen und praktischen Voraussetzungen für die optimale Dimensionierung der Gestellbaugruppen von Werkzeugmaschinen bedarf es einer Reihe grundsätzlicher Betrachtungen zu den Problemen der Gestaltung der Zielfunktion und der Auswahl des Suchverfahrens. Folgend sollen die wesentlichsten Aspekte dieser Probleme erörtert werden.

Das Grundprinzip einer Optimierung lässt sich am einfachsten mit der Existenz gegenläufiger Teilziele charakterisieren. So bewirkt z.B. eine Vergrößerung der Querschnittsabmessungen eines Gestellteiles eine Verringerung der statischen Nachgiebigkeit, aber zugleich auch eine Vergrößerung der Gestellmasse. Da die Zielstellung eine geringe Nachgiebigkeit bei kleiner Masse verlangt, können die beiden Teilziele nicht unabhängig voneinander verfolgt werden; es ist der optimale Kompromiss zwischen den Teilzielen zu suchen.

### Minimierung mit mehreren Teilzielen

Die praktische Realisierung einer Minimierung mit mehreren Teilzielen ist auf sehr verschiedene Art möglich. Bild 2.356 zeigt die gebräuchlichsten Verfahren an einem extrem einfachen, eindimensionalen Beispiel mit den gegenläufigen Teilzielen:

$$F_1 = f * X, \quad F_2 = a/X.$$

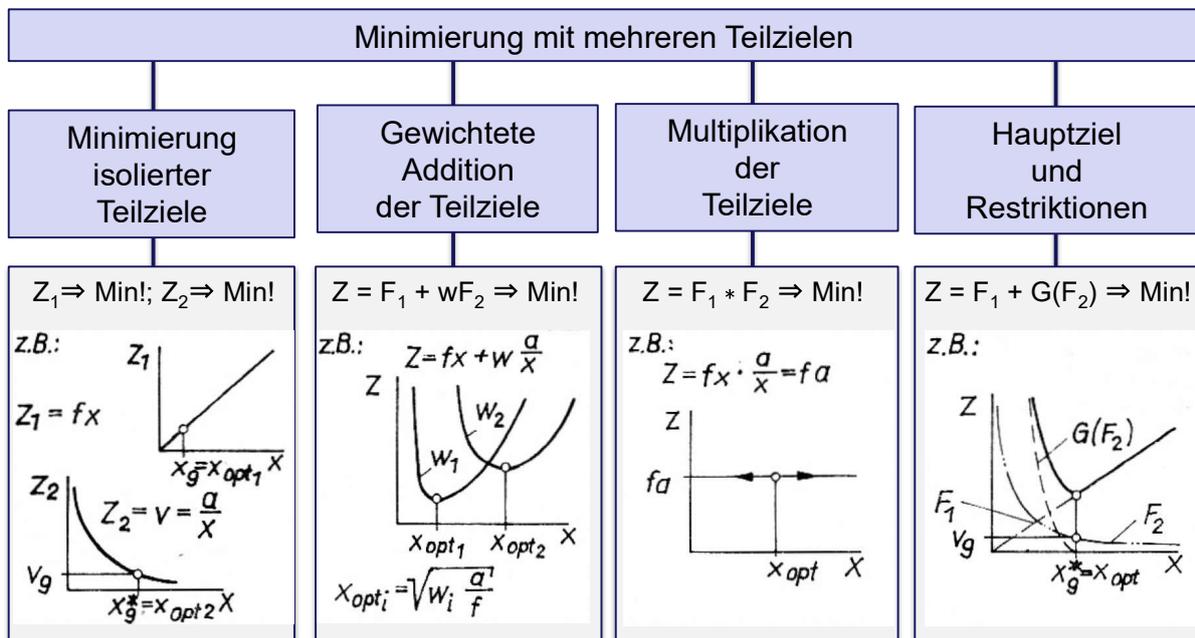


Bild 2.356 Minimierung mit mehreren Teilzielen

Für eine Minimierung beider Teilziele innerhalb  $X_g \leq X \leq X_g^*(V_g)$  ist das Optimum für  $X$  gesucht. Die Minimierung isolierter Teilziele führt zu den einzelnen Randextrema und liefert hier für den eindimensionalen Fall ein eindeutiges Ergebnis; für mehrdimensionale Probleme sind die Lösungen jedoch im allgemeinen nicht mehr überschaubar. Die gewichtete Addition der Teilziele überlässt es der subjektiven Wahl der Wichtungsfaktoren, das Optimum über

dem gesamten zulässigen Bereich zu verschieben. Die Multiplikation der Teilziele führt bei dem vorliegenden Beispiel sogar zu einer von den Variablen unabhängigen Zielfunktion. Die Definition von  $F_1$  als Hauptziel und die Berücksichtigung von  $F_2$  über eine Straffunktion im Sinne einer bestehenden Restriktion liefert eine objektive und von den Verknüpfungsparametern weitestgehend unabhängige Optimallösung.

Als Grundform der Zielfunktion wird daher  $Z(X) = F_0(X) + \sum_i G_i(F_i(X))$  gewählt.

### Berücksichtigung der Restriktionen im Zusammenhang mit den Suchverfahren

Die Realisierung der Restriktionen steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem zur Anwendung kommenden numerischen Suchverfahren. Bild 2.357 gibt eine grobe Charakterisierung der Verfahrensgruppen.

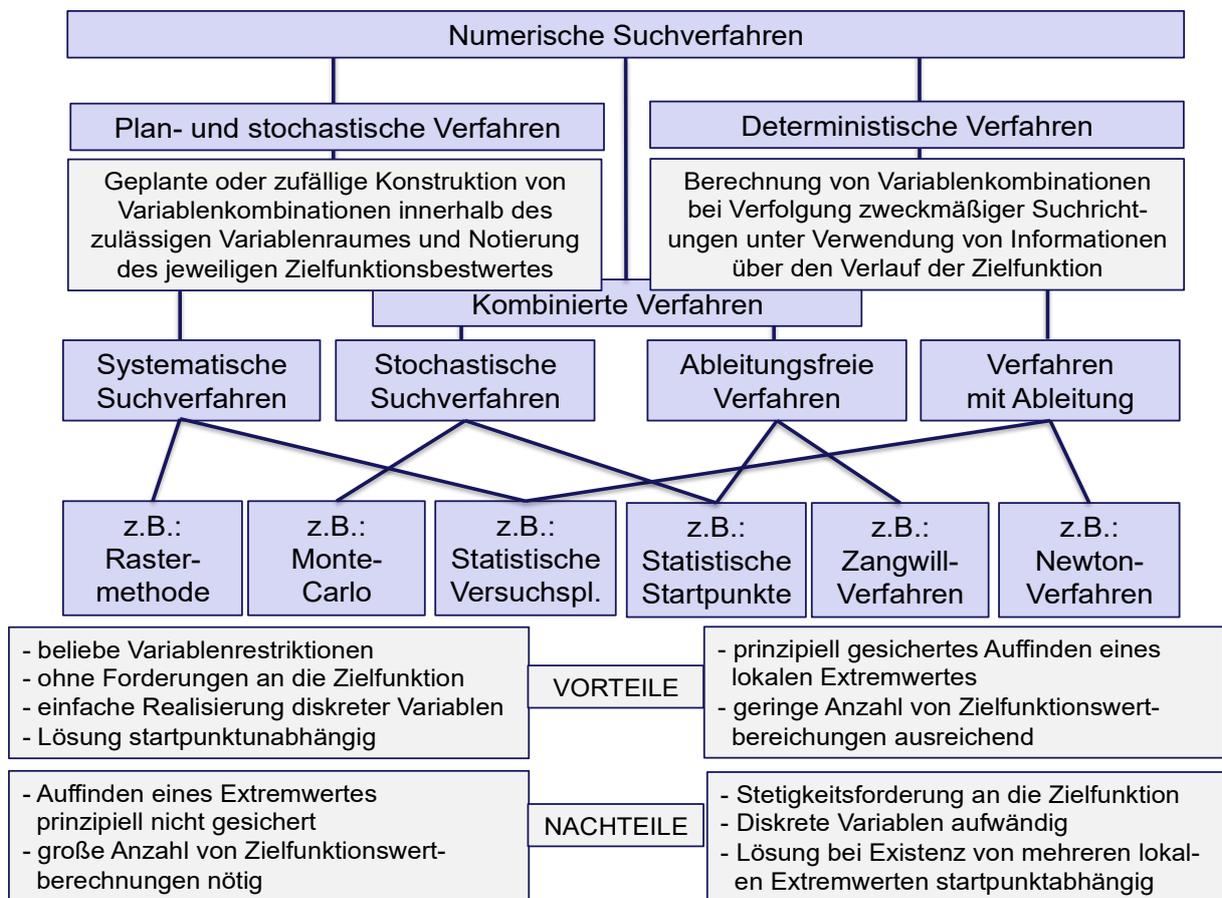


Bild 2.357 Klassifizierung der Suchverfahren

Der Hauptunterschied zwischen den Plan- und Stochastischen Verfahren und den Deterministischen Verfahren besteht im Zustandekommen der Variablenvektoren während des Suchvorganges. Bei den *Plan- und Stochastischen Verfahren* werden die Variablen planmäßig oder stochastisch konstruiert, wobei bereits alle unmittelbaren Variablenrestriktionen und eventuell vorliegende Diskretisierungsforderungen bezüglich der Variablen direkt berücksichtigt werden können. Auch die Berücksichtigung der Verhaltensrestriktionen ist möglich und beschränkt sich auf das Speichern bzw. Streichen des jeweiligen Loses für den Variablenvektor. Die *Deterministischen Verfahren* liefern demgegenüber einen aus dem Zielfunktionsverhalten berechneten Variablenvektor, welcher nur dann die Variablen- und Verhaltensrestriktionen erfüllt, wenn diese in entsprechender Weise in die Zielfunktion aufgenommen

werden. Die Tendenzen der Entwicklung effektiver numerischer Suchverfahren gehen in Richtung der *kombinierten Verfahren*, wobei in einer ersten Phase die stochastische Suche eines günstigen Startpunktes erfolgt, um den herum in einer zweiten Phase deterministisch das Optimum bestimmt wird.

Bild 2.358 zeigt einige prinzipielle Möglichkeiten zur Berücksichtigung von Restriktionen für deterministische Suchverfahren. Für lineare und nichtlineare Restriktionen bieten sich die Verfahrensweisen des Rücksetzens der Variablen und die Verwendung von Straffunktionen an, die zudem mit dem erheblichen Vorteil verbunden sind, in Bezug auf die Restriktionen keine strengen Forderungen an das Zielfunktionsverhalten zu stellen.

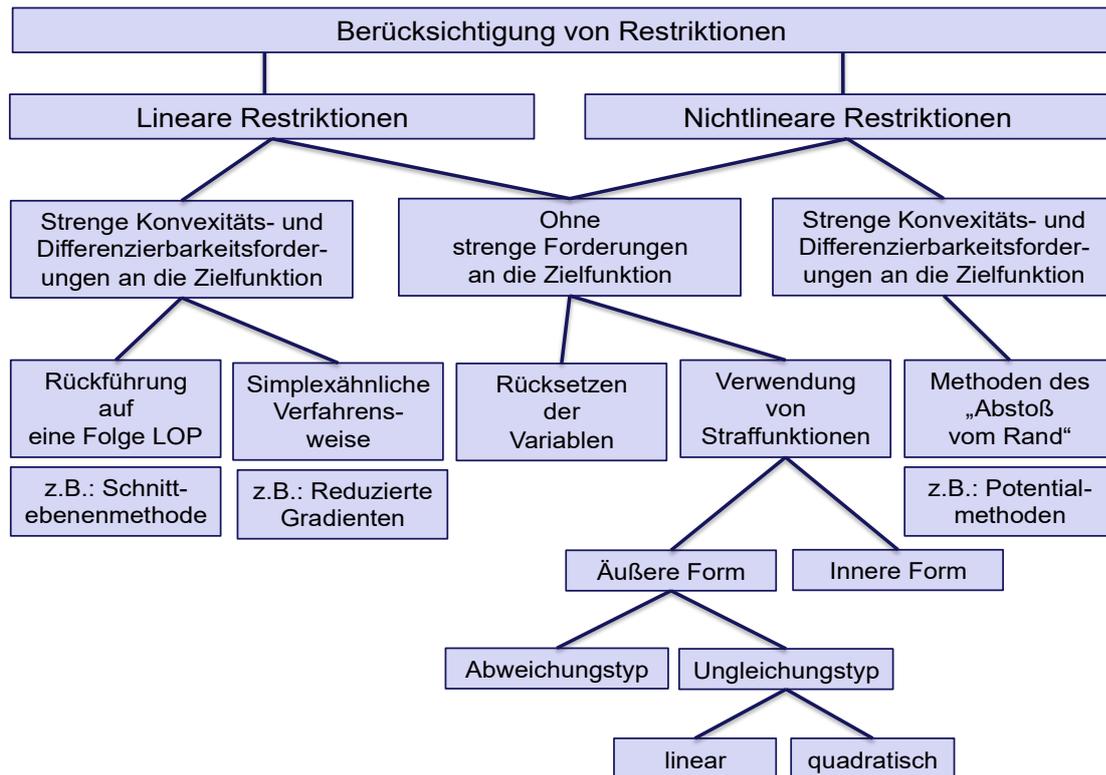


Bild 2.358 Berücksichtigung von Restriktionen

In Bild 2.359 sind an einem zweidimensionalen Beispiel (a) beide Möglichkeiten demonstriert. Der entscheidende Nachteil des Rücksetzens der Variablen (b) besteht in der Möglichkeit des Festrennens an einer Restriktionswand, da die weitere Minimierung der Zielfunktion verhindert wird, sobald keine Komponente der Suchrichtung mehr in den zulässigen Bereich weist. Dieser, das Suchverfahren in Frage stellende Nachteil tritt beim Gebrauch von Straffunktionen (c) nicht auf.

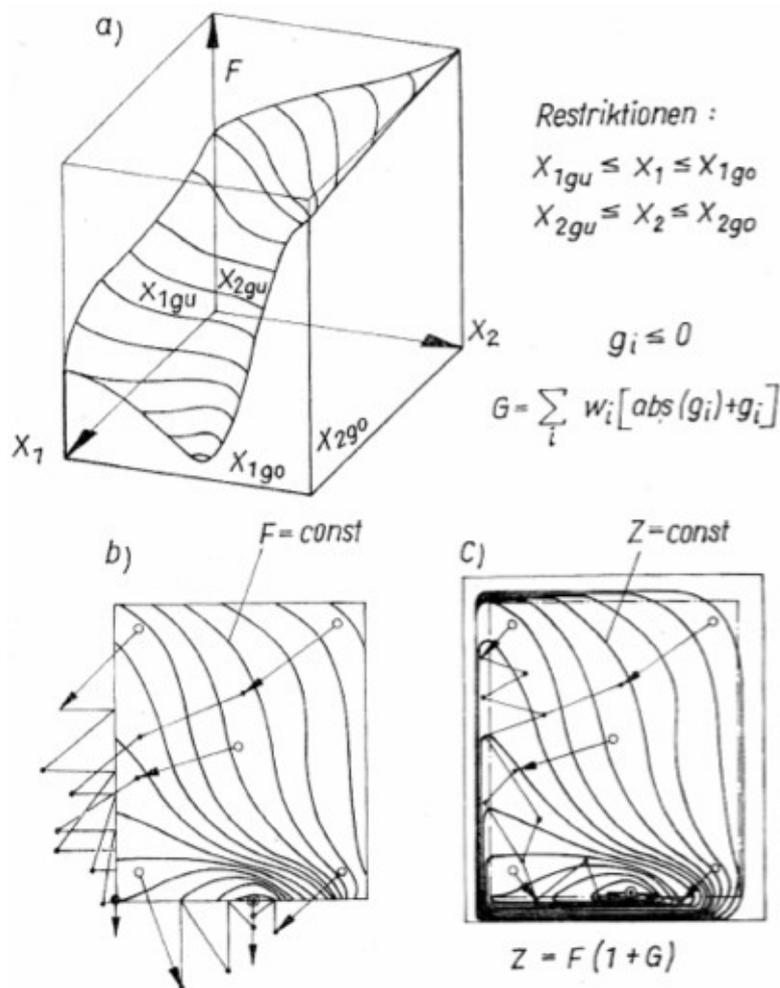


Bild 2.359 Suchverlauf a) am Beispiel  $Z(x_1, x_2)$ ,  
 b) für Rücksetzen der Variablen und  
 c) für Verwendung von Straffunktionen

Für die Anwendung von Straffunktionen existieren mehrere Möglichkeiten, von denen die wesentlichsten im Bild 2.360 dargestellt sind. Da die Dimensionierungsproblematik häufig auf Randoptima führt, wird der Ungleichungstyp als äußere Form (exterior penaltyfunction) gewählt und zur Kompensation der damit entstehenden Unstetigkeit in der Differenzierbarkeit quadriert:

$$G(g_i(X)) = \sum_i \mu_i (g_i(X) + |g_i(X)|)^2$$

mit  $g_i(X) \leq 0$ .

Die Variablen- und Verhaltensrestriktionen werden nun wie Teilziele in der Strafsumme der Zielfunktion berücksichtigt. Die Strafanteile werden bei Verletzung der Restriktionen in der Zielfunktion jedoch nur wirksam, wenn sie in der Größenordnung des Hauptzieles  $F_0(X)$ , dem sogenannten unbeschränkten Zielfunktionsanteil, liegen. Um dies über entsprechende Faktoren  $\mu_i$  leicht abschätzen zu können, werden die Strafanteile auf den unbeschränkten Anteil der Zielfunktion bezogen, wodurch die Straffunktionen  $G(g_i(X))$  dann die Größenordnung von 1 besitzen müssen, um gegenüber dem Hauptziel  $F_0(X)$  wirksam zu werden.

Wird mit  $\Delta X_i$  die Wirksamkeitsschranke einer Restriktion, im Sinne einer Restriktionstoleranz, bezeichnet so folgt  $\mu_i \approx 1/\Delta X_i^2$ .

Eine Abmessungsrestriktion in der Maßeinheit  $m$ , welche ab  $\Delta X = 1 \text{ mm} = 10^{-3} m$  scharf ansprechen soll, muss damit einen Faktor  $\mu \approx 10^6 m^{-2}$  erhalten.

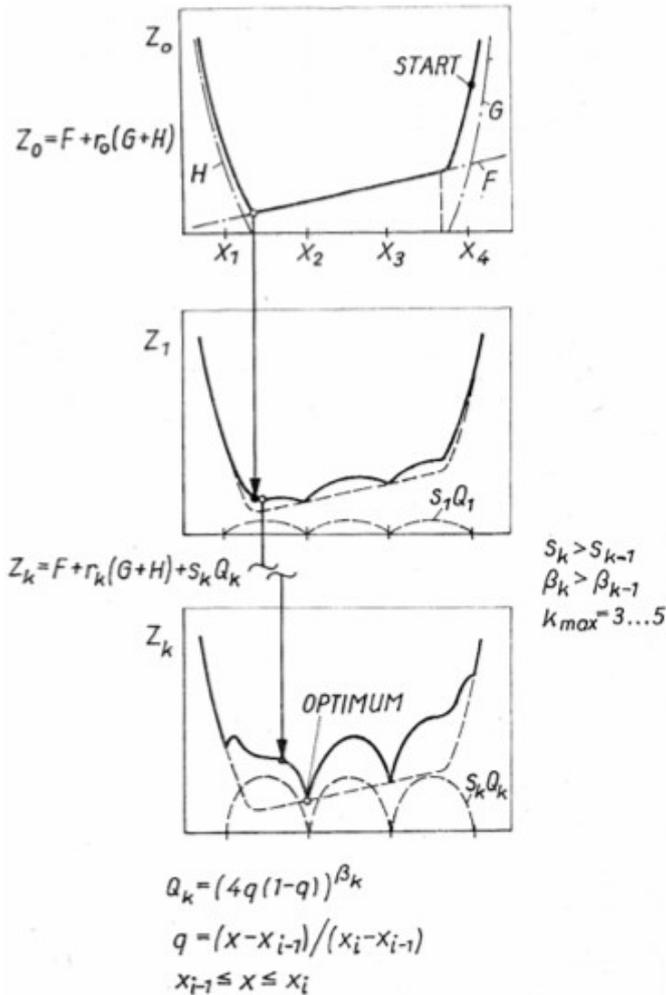


Bild 2.360 Berücksichtigung diskreter Variablen mit Straffunktionen

### Verwendung diskreter Variabler

Unter diskreten Variablen werden solche Variablen verstanden, deren zulässiger Wertebereich diskret ist. Im Zusammenhang mit der Dimensionierung von Werkzeugmaschinenstrukturen können dies z.B. Führungsbahnabstände oder andere konstruktive Anschlussmaße an typisierte Baugruppen sein. Die Berücksichtigung diskreter Variabler ist bei Deterministischen Verfahren ebenfalls über die Verwendung von Straffunktionen möglich. In Bild 2.360 ist die Vorgehensweise schematisch dargestellt.

In einem ersten Schritt wird die aus dem unbeschränkten Anteil  $F_0(X)$ , den Variablenrestriktionen  $G(X)$  und den Verhaltensrestriktionen  $H(V(X))$  gebildete  $Z_0(X)$  minimiert. Die Lösung liegt außerhalb der diskreten Werte  $X_{Di}$ . In den folgenden Schritten  $k$  werden für  $X_i \neq X_{Di}$  jeweils wachsende Strafanteile  $s_k Q_k$  in die Zielfunktion aufgenommen. Die im vorangegangenen Schritt gefundene Lösung dient als Startpunkt für die modifizierte Minimumsuche. Nach etwa 3 bis 5 derartigen Zyklen fällt dann die Lösung in den optimalen diskreten Wert.

Die Lösung liegt außerhalb der diskreten Werte  $X_{Di}$ . In den folgenden Schritten  $k$  werden für  $X_i \neq X_{Di}$  jeweils wachsende Strafanteile  $s_k Q_k$  in die Zielfunktion aufgenommen. Die im vorangegangenen Schritt gefundene Lösung dient als Startpunkt für die modifizierte Minimumsuche. Nach etwa 3 bis 5 derartigen Zyklen fällt dann die Lösung in den optimalen diskreten Wert.

### Formulierung der Zielfunktion

Unter Berücksichtigung der vorangestellten Betrachtungen kann die formale Zielfunktion nunmehr wie folgt konkretisiert werden :

$$Z(X) = \delta_F F_0(X) + \delta_R |F_0(X)| * \left( r_k \left( G(g_l(X)) + H \left( h_l(V_j(X)) \right) \right) + s_k Q_k(X_D, \beta_k) \right) \Rightarrow \text{Min!}$$

Dabei sind:

$\delta_F$  Faktor des unbeschränkten Zielfunktionsanteiles  $F_0(X)$   
mit  $\delta_F > 0$  für  $F_0(X) \Rightarrow \text{Min!}$  und  $\delta_F < 0$  für  $F_0(X) \Rightarrow \text{Max!}$

- $\delta_R$  Faktor der Straffunktionsanteile
- $r_k$  Zyklusfaktor der Variablen- und Verhaltensstrafen
- $s_k$  Zyklusfaktor der diskreten Strafanteile
- $k$  Diskretisierungszyklus

Um die gesamte Zielfunktion  $Z(X)$  dimensionslos und für den Startwert bei der Erfüllung aller Restriktionen = 1 zu gestalten, wird  $F_0(X) = U(X)/U(X_0)$  aus dem Verhältnis des aktuellen unbeschränkten  $U(X)$  zum Startwert  $U(X_0)$  gebildet.

### Beispiel zum Verfahrensvergleich

Im Folgenden sind an einem einfachen zweidimensionalen Problem verschiedene Möglichkeiten der Restriktionsberücksichtigung, des Zielfunktionsaufbaues sowie des Einsatzes unterschiedlicher Suchverfahren gegenübergestellt. Es handelt sich dabei um einen einseitig eingespannten Biegebalken, modelliert mit zwei Elementen gleicher Länge mit Kastenquerschnitt, Bild 2.361. Als Variable wurden die beiden Wandstärken  $s_1$  und  $s_2$  gewählt. Das Volumen ist zu minimieren; die Restriktionen liegen für beide Wandstärken als untere und obere Begrenzungen und für die Nachgiebigkeit am Kraftangriffspunkt als obere Schranken vor.

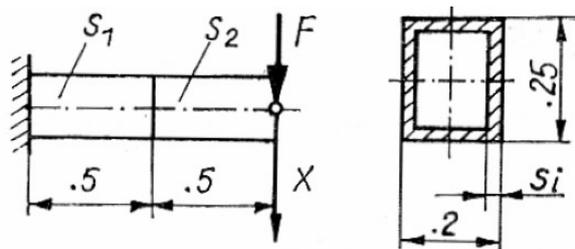


Bild 2.361 Optimierungmodell  
 $i = 1,2$

Im Bild 2.362 sind die Suchschritte bei Verwendung des Verfahrens nach Fletcher-Powell [36] bzw. extremer Anstiege mit konstanter und zielentfernungsabhängiger Schrittweite dargestellt.

Die Variablenrestriktionen werden dabei durch Rücksetzen realisiert. Die Verformungsrestriktion wird in der Zielfunktion in Form des Gleichheitstypes als abweichungsabhängiger Strafanteil berücksichtigt, womit sich das Pendeln um die Verformungsgrenze erklären lässt. Bei extremen Anstiegen mit konstanten Schritten und bei Fletcher-Powell wird deutlich das Festrennen an der Restriktionswand sichtbar, während extreme Anstiege mit zielentfernungsabhängiger Schrittweite die Gefahr des vorzeitigen Stopps erkennen lassen.

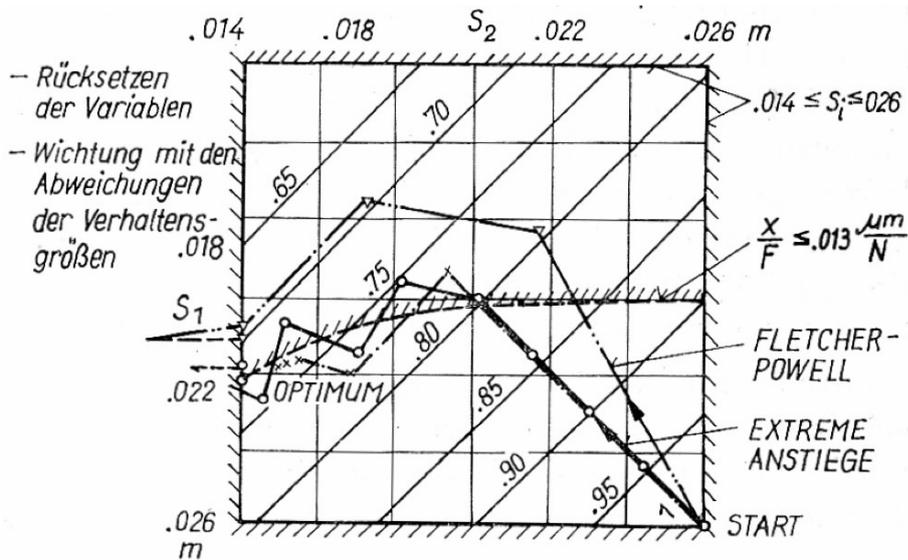


Bild 2.362 Suchverlauf am Beispiel für Fletcher-Powell und extreme Anstiege

Im Bild 2.363 sind das Newton-Verfahren und das Verfahren von Zangwill [37] gegenübergestellt.

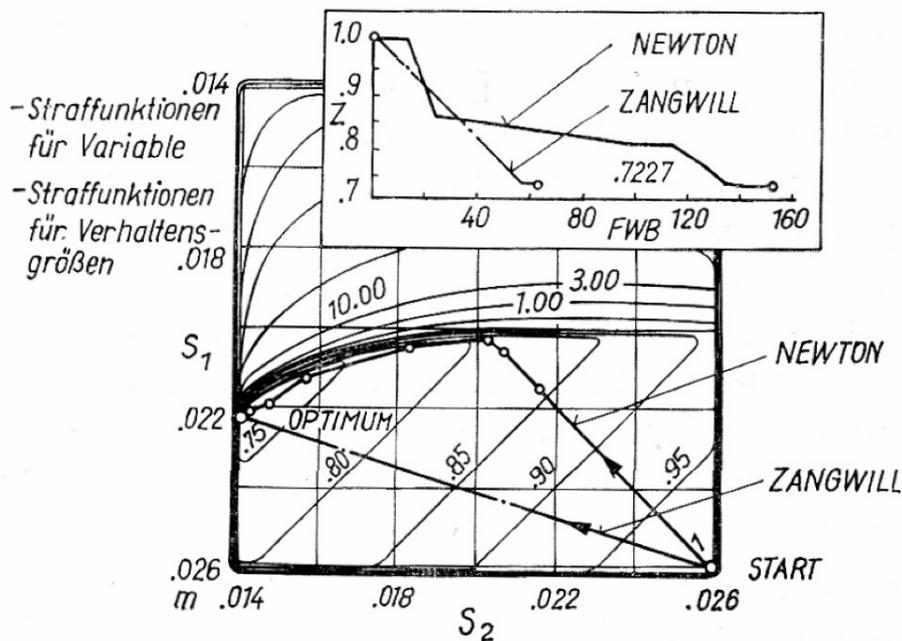


Bild 2.363 Suchverlauf am Beispiel für Newton und Zangwill

Deutlich zeichnet sich in der Höhenliniendarstellung das leicht geneigte und vom Restriktionsgebirge eingeschlossene Lösungstal ab. Beide Verfahren erreichen zielstrebig das Optimum. Die Darstellung des Zielfunktionsverlaufes über der Anzahl der Funktionswertberechnungen weist das bessere Konvergenzverhalten des Verfahrens von Zangwill aus. Diese Aussage ist jedoch stark von der Anzahl der Variablen und der konkreten Gestalt der Zielfunktion abhängig.

### 2.3.3.2 Topologieoptimierung

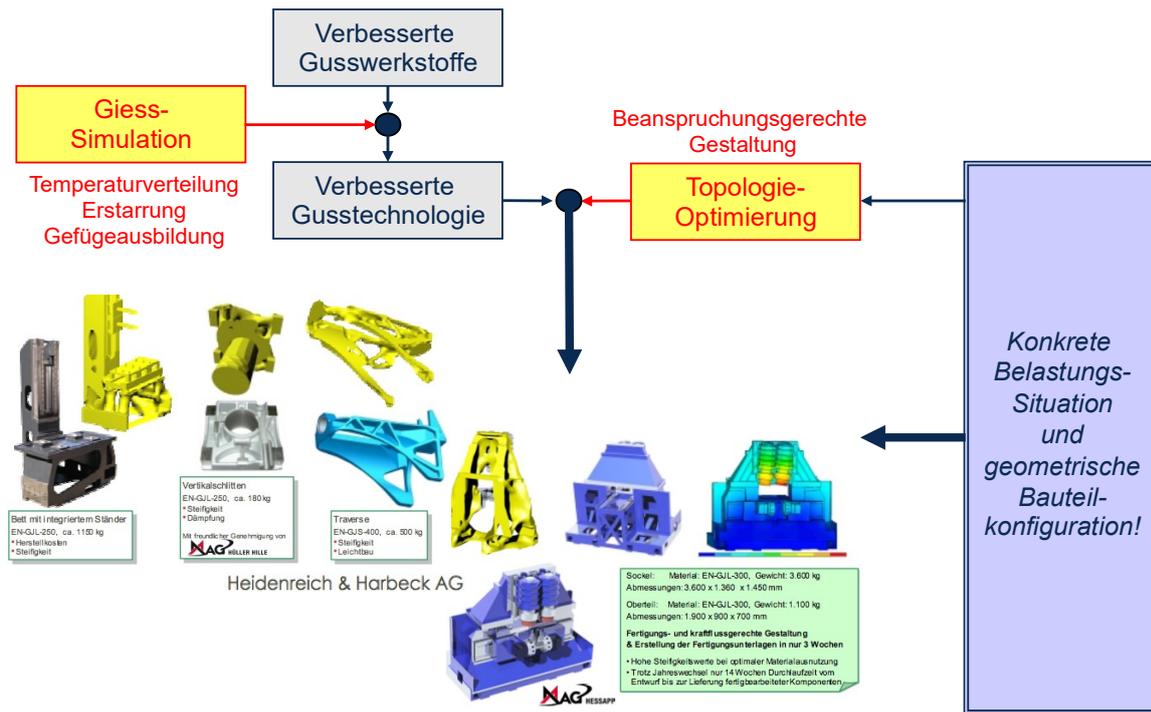
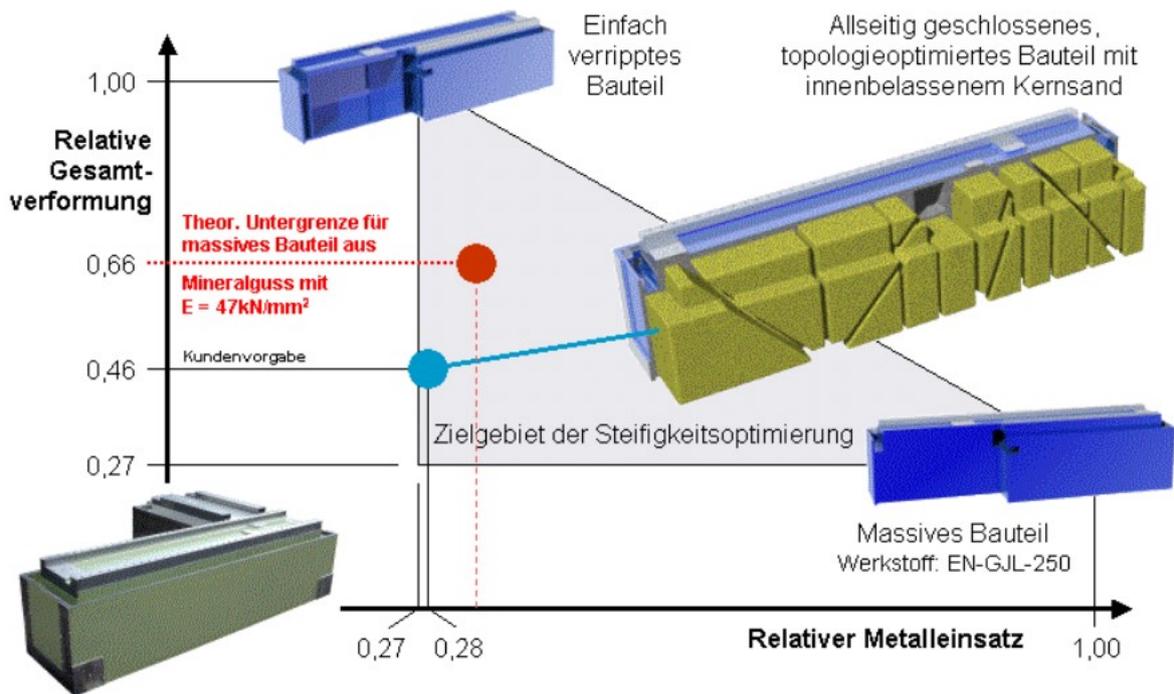


Bild 2.364 Praktische Anwendung der Topologieoptimierung



Heidenreich & Harbeck AG

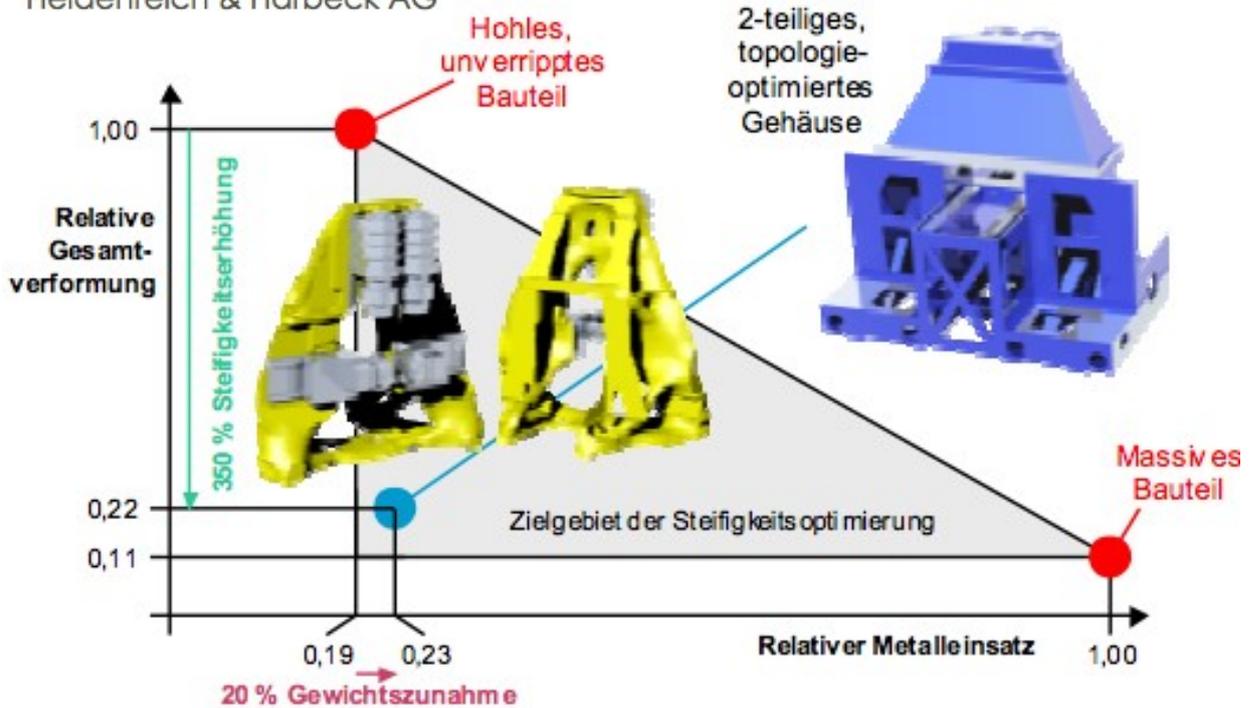


Bild 2.365 Beispielergebnisse der Topologieoptimierung