2.4 Methoden zur Effizienzsteigerung der Analyse

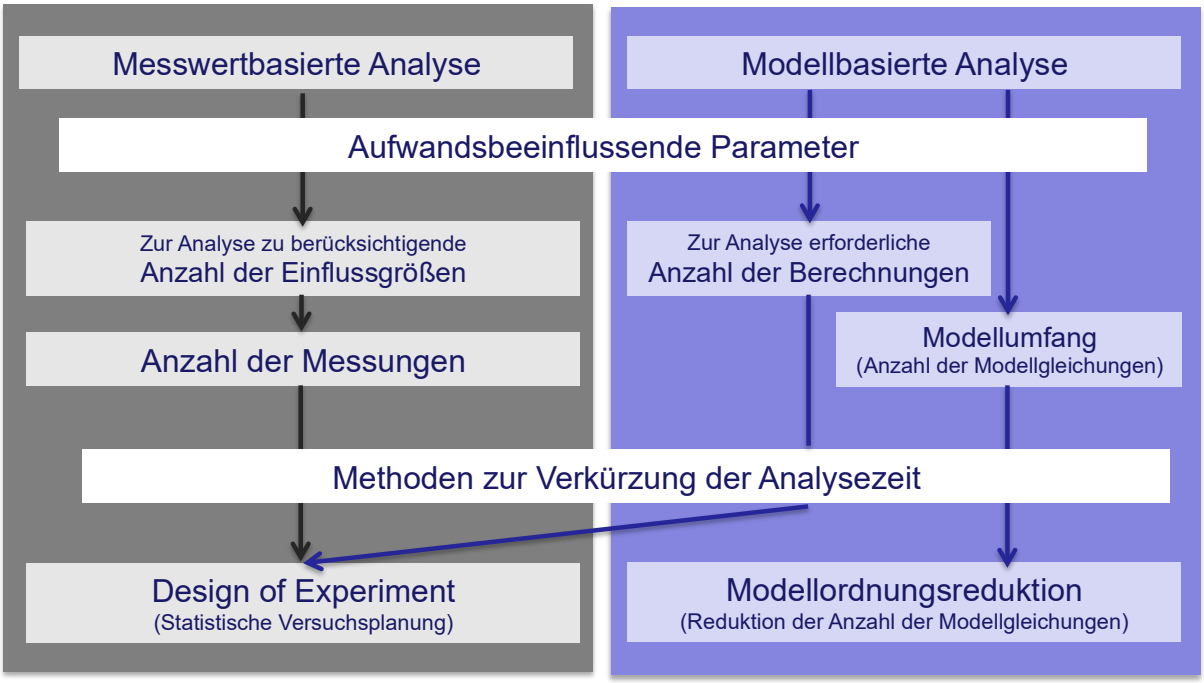


Bild 2.366 Methoden zur Effizienzsteigerung der Analyse

2.4.1 Design of Experiment

2.4.2 Modellordnungsreduktion

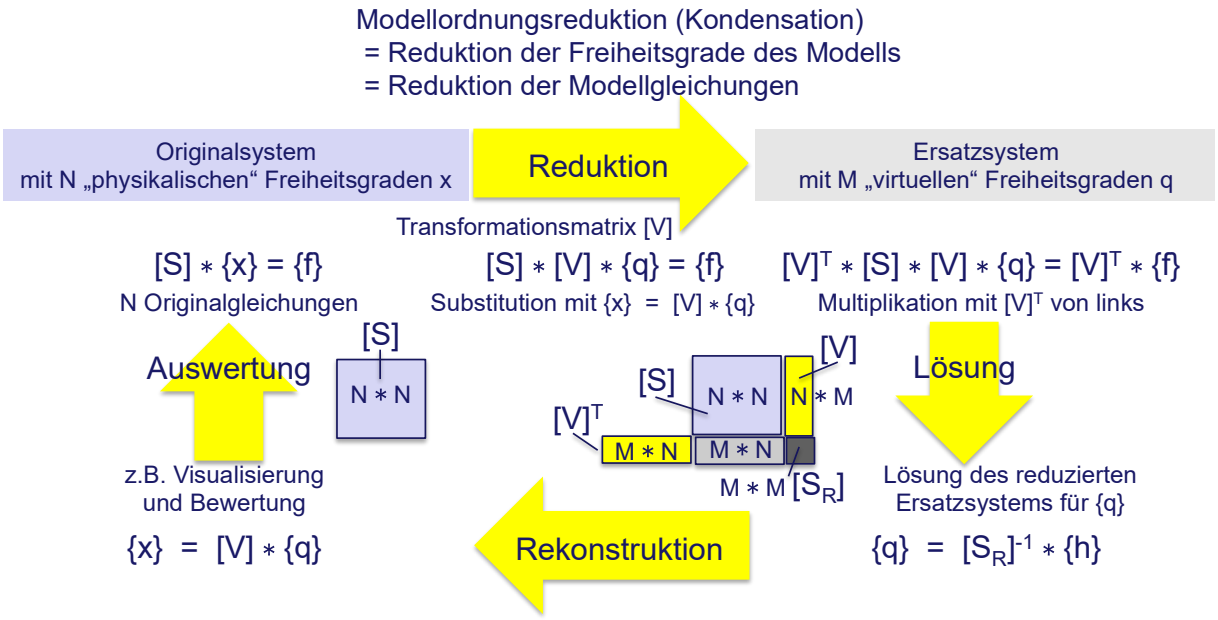
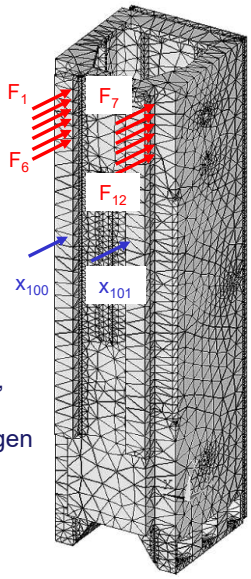


Bild 2.367 Modellordnungsreduktion als Transformation

2.4.2.1 Modellordnungsreduktion in der Statik

Einerseits sind für die realitätsnahe Abbildung der geometrischen Struktur eine Vielzahl von Elementen (1000...50000) erforderlich, womit eine Vielzahl von DoF und damit Gleichungen (25000...1000000) generiert werden.

Andererseits interessiert nur ein Bruchteil der vorliegenden DoF, nämlich die DoF für Lasteinleitung, Koppelstellen bzw. Randbedingungen und interessierende Verformungen (10...500).



Eine anschauliche, aber wenig effiziente Lösung:

$[C] * \{x\} = \{F\}$

↓ Invertieren der Steifigkeits- zur Nachgiebigkeits-Matrix

$[N] = [C]^{-1}$

↓ Streichen der nicht interessierenden Freiheitsgrade, d.h. Zeilen und Spalten in der Nachgiebigkeits-Matrix

$[N] \Rightarrow [N_R]$

$\{x_R\} = [N_R] * \{F_R\}$ $\quad [C_R] = [N_R]^{-1}$

Statische Modellordnungsreduktionen sind für lineare Modelle exakt.

Bild 2.368 Streichen nicht interessierender Nachgiebigkeiten

$$[C] * \{x\} = \{F\}$$

$$\begin{bmatrix} C_{RR} & C_{RS} \\ C_{SR} & C_{SS} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} x_R \\ x_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_R \\ F_S \end{Bmatrix}$$

$$\{F_R\} \neq \{0\} \; ; \{F_S\} = \{0\}$$

R : Reduktion (zu berücksichtigende DoF)
S : Streichung (nicht erforderliche DoF)

x_R : Koordinaten (DoF) für
- äußere Lasten,
- Kopplungen,
- interessierende Verhaltensgrößen

$$[C_{RR}]\{x_R\} + [C_{RS}]\{x_S\} = \{F_R\}$$
$$[C_{SR}]\{x_R\} + [C_{SS}]\{x_S\} = \{0\}$$

$$\{x_S\} = -[C_{SS}]^{-1}[C_{SR}]\{x_R\}$$

$$([C_{RR}] - [C_{RS}]\,[C_{SS}]^{-1}[C_{SR}])\,\{x_R\} = \{F_R\}$$

$$[C_R] = [C_{RR}] - [C_{RS}]\,[C_{SS}]^{-1}[C_{SR}]$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_R \\ x_S \end{Bmatrix} = [V_G]\,\{x_R\}$$

$$\{x_S\} = -[C_{SS}]^{-1}[C_{SR}]\,\{x_R\}$$

$$[V_G] = \begin{bmatrix} [E] \\ -[C_{SS}]^{-1}[C_{SR}] \end{bmatrix}$$

$$U_{pot} = \frac{1}{2}\{x\}^T[C]\{x\} = \frac{1}{2}\{x_R\}^T[C_R]\{x_R\}$$

$$([V]\{x_R\})^T[C]\,[V]\{x_R\} = \{x_R\}^T[C_R]\{x_R\}$$

$$([V]\{x_R\})^T = \{x_R\}^T[V]^T \longrightarrow [V]^T[C]\,[V] = [C_R]$$

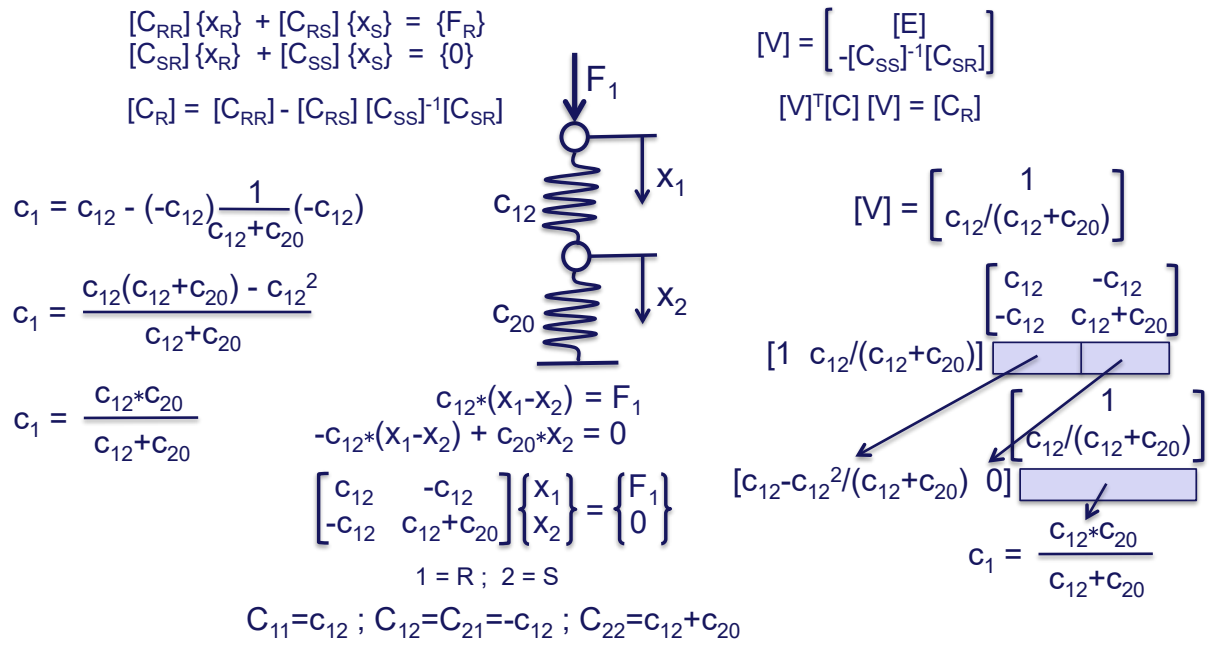


Bild 2.369 Statische Kondensation nach Guyan

2.4.2.2 Modellordnungsreduktion in der Thermik

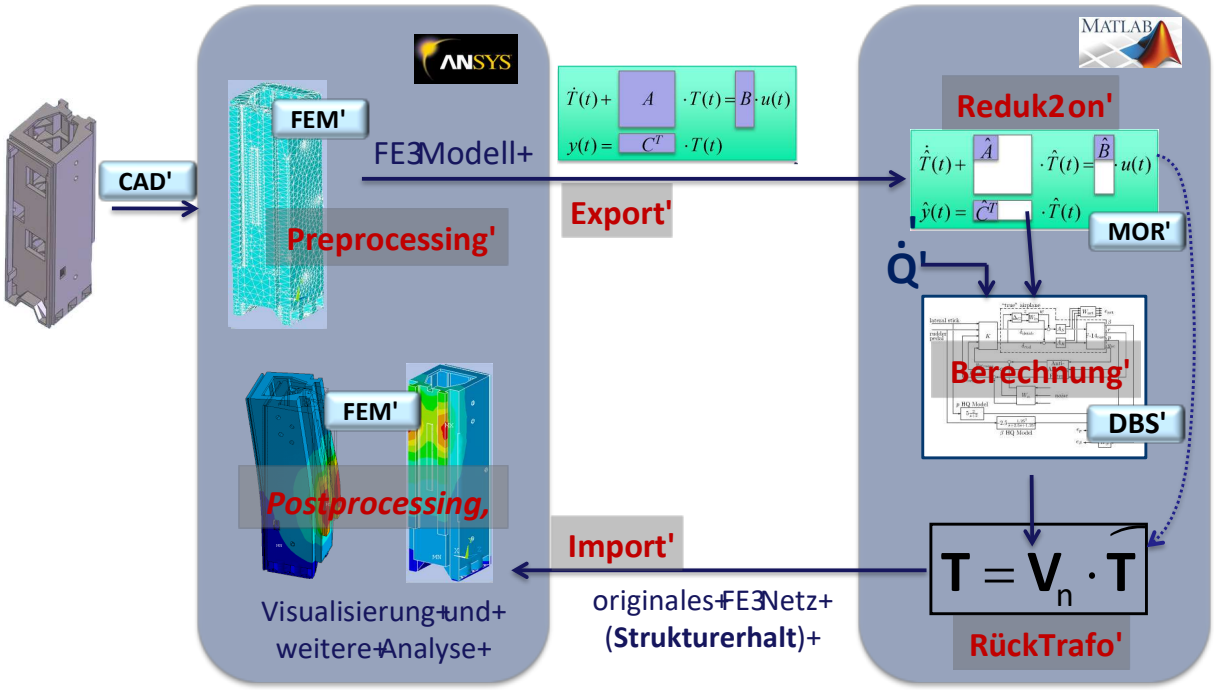
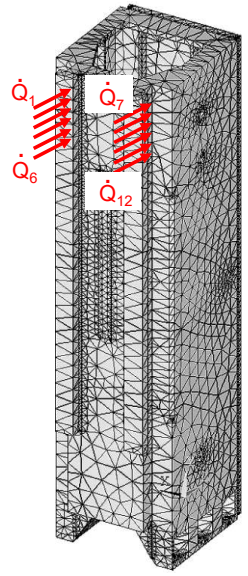


Bild 2.370 Berechnungsmethodik mit ANSYS und MATLAB/Simulink



Ausgangs-Gleichungssystem $[K_T]\{\dot{T}\} + [L_T]\{T\} = \{\dot{Q}(t)\}$ mit Matrizen N∗N

Überführung in Zustandsraum-Darstellung

$$\{\dot{T}\} + [K_T]^{-1}[L_T]\{T\} = [K_T]^{-1}\{\dot{Q}(t)\}$$

$$\{\dot{T}\} + [A]\{T\} = [B]\{u\}$$

$$\{y\} = [I]^T\{T\}$$

$\{T\} = [V_K]\{\tau\}$ $[V_K]$ ist N∗M Transformationsmatrix, mit der eine Darstellung im Bildkoordinatensystem $\{\tau\}$ gelingt, dessen Zahl M der DoF viel kleiner als N ist!

$$[V_K]\{\dot{\tau}\} + [A][V_K]\{\tau\} = [B]\{u\}$$

$$\{y\} = [I]^T[V_K]\{\tau\}$$

$$[V_K]^T[V_K]\{\dot{\tau}\} + [V_K]^T[A][V_K]\{\tau\} = [V_K]^T[B]\{u\}$$

$$\{y\} = [I]^T[V_K]\{\tau\}$$

$$[V_K]^T[V_K] = [E] \; ; \; [V_K]^T[A][V_K] = [a] \; ; \; [V_K]^T[B] = [b] \; ; \; [I]^T[V_K] = [i] \; ;$$

$$\{\dot{\tau}\} + [a]\{\tau\} = [b]\{u\}$$

$$\{y\} = [i]\{\tau\}$$

Bild 2.371 Modellordnungsreduktion mit dem Krylov-Verfahren

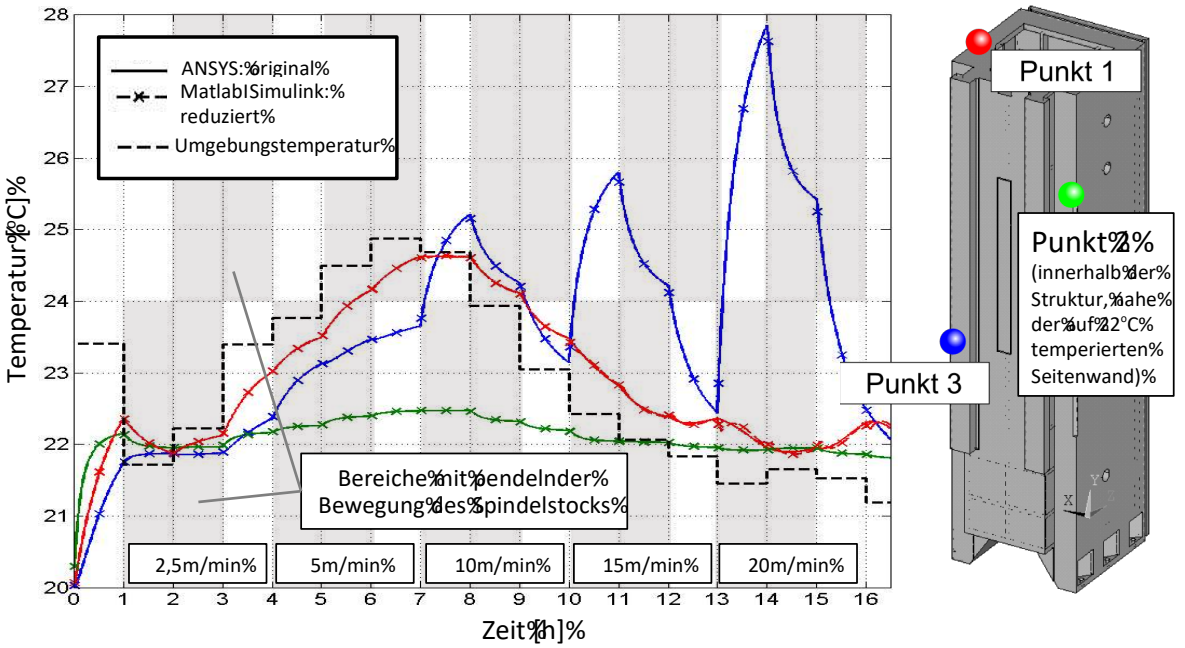


Bild 2.372 Genauigkeitsvergleich: Temperaturverläufe

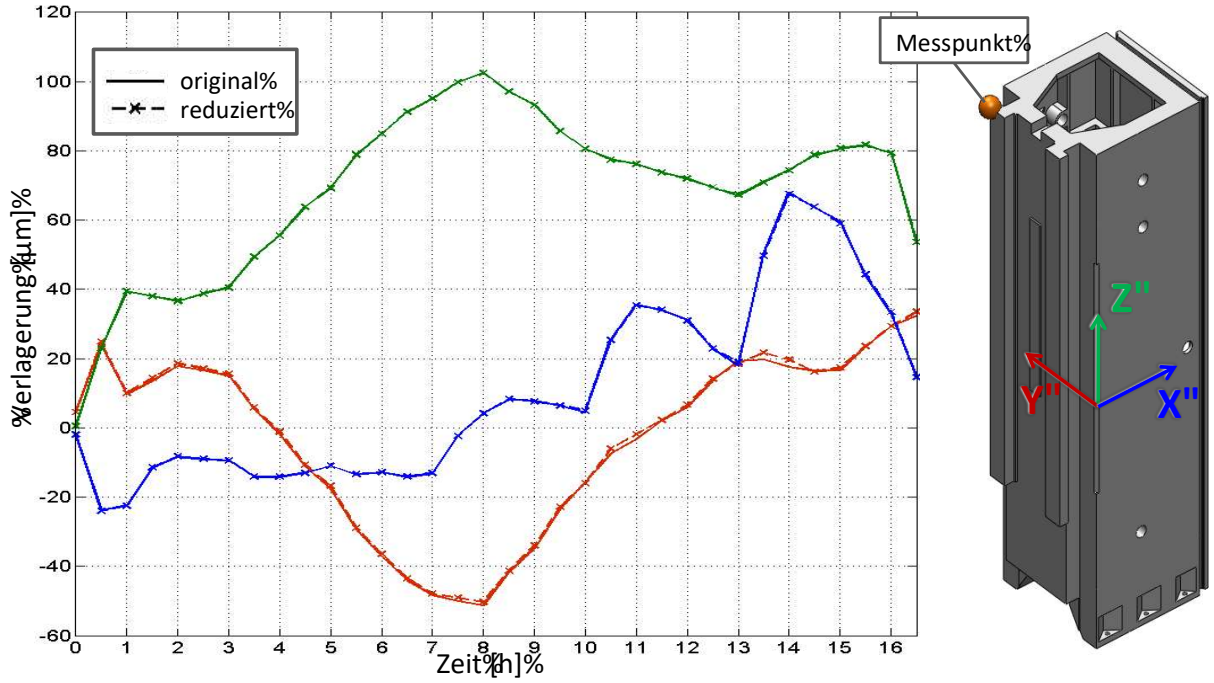


Bild 2.373 Genauigkeitsvergleich: Verlagerung in 3 Raumrichtungen

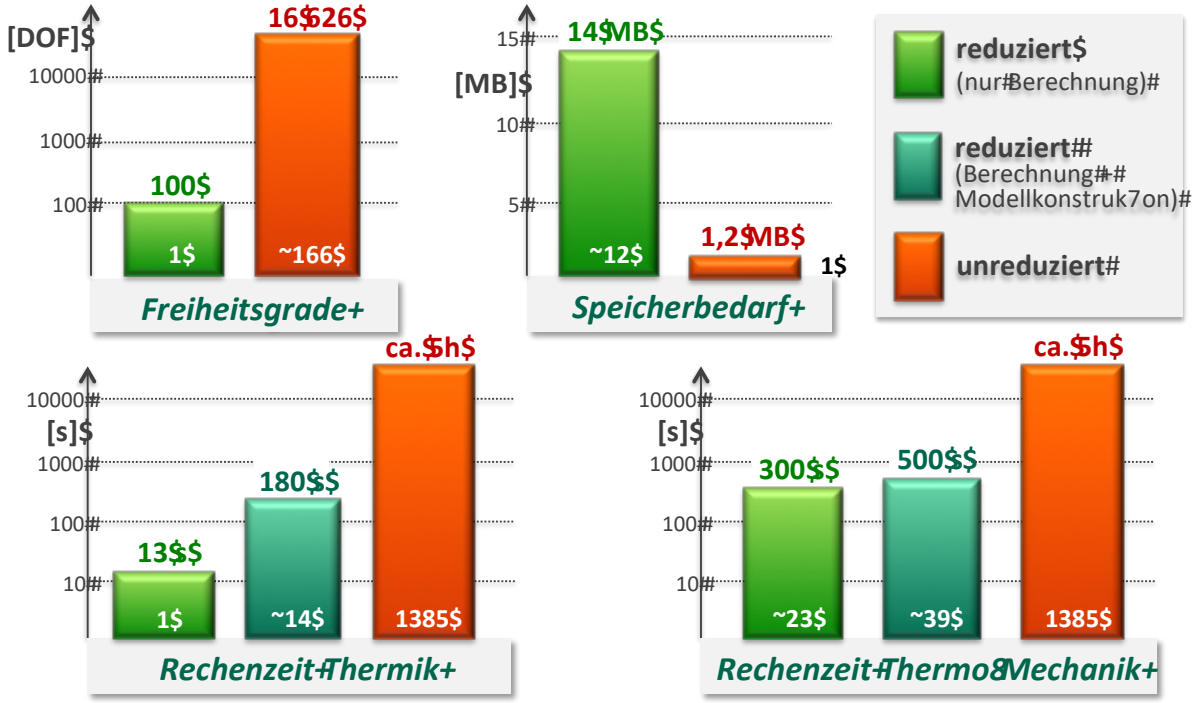


Bild 2.374 Aufwandsvergleich für das Beispiel

2.4.2.3 Modellordnungsreduktion in der Dynamik

Eine effiziente, aber zumeist ungenaue Lösung:

Übertragung der statischen Kondensation nach Guyan auf die Trägheitsmatrix

$$[V_G] = \begin{bmatrix} [E] \\ -[C_{SS}]^{-1}[C_{SR}] \end{bmatrix}$$

R : Reduktion (zu berücksichtigente DoF)
S : Streichung (nicht erforderliche DoF)

$$[V_G]^T[M]\,[V_G] = [M_R]$$

Bild 2.375 Anwendung der Guyan-Transformation auf die Trägheitsmatrix

Modalmatrix

$$[X] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix}_1 & \dots & \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix}_j & \dots & \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix}_M \end{bmatrix}$$

Streichen der Zeile i = Streichen des Freiheitsgrades i

$[X] \Rightarrow [X_R]$

Streichen der Spalte j = Streichen der Eigenwertordnung j

$$[V_M] = [X_R]$$

$$[\gamma] = [V_M]^T[C][V_M]$$

$$[\mu] = [V_M]^T[M][V_M]$$

Bild 2.376 Modaltransformation